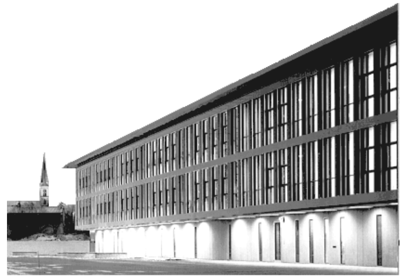
Gymnasium Eckental

Mathematisch-naturwissenschaftliches Gymnasium
Neusprachliches Gymnasium



Gymnasium Eckental   Neunkirchener Straße 1   90542 Eckental

Grundwissen

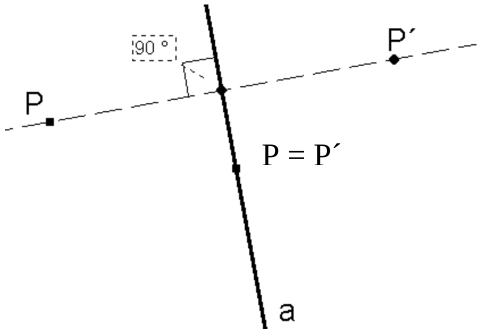
Jahrgangsstufe: 7(G8)

Vereinfachen von Summen	
• Gleichartige Terme	$a^2 + a^4 = a^2 + a^4$
	$a^2 + 2a^2 = 3a^2$
	$bx + 3b^2x - b^2 - \frac{7}{6}bx = -\frac{1}{6}bx + 3b^2x - b^2$
• Auflösen von Klammern	$2 + (2{,}8 + \frac{1}{5}) = 2 + 2{,}8 + \frac{1}{5} = 5$
	$2 + (2{,}8 - \frac{1}{5}) = 2 + 2{,}8 - \frac{1}{5} = 4{,}6$
	$2 - (2{,}8 + \frac{1}{5}) = 2 - 2{,}8 - \frac{1}{5} = -1$
	$2 - (2{,}8 - \frac{1}{5}) = 2 - 2{,}8 + \frac{1}{5} = -0{,}6$

Vereinfachen von Produkten	$(2u)\cdot v\cdot(\frac{1}{2}uv)^2\cdot\frac{1}{6}v=\frac{1}{12}u^3v^4$ $(5a^2\cdot 15{,}4b^2c):(44a^3b^2:0{,}8ac)=1{,}4c^2$ $(-\frac{x^2}{3})^3\cdot(6x^2y^3)^2=-\frac{4}{3}x^{10}y^6$
Distributivgesetz • Ausmultiplizieren (Umwandlung eines Produkts in eine Summe) • Ausklammern (Faktorisieren) (Umwandlung einer Summe in ein Produkt)	$a(b+c)=ab+ac;\quad (bd+cd):d=b+c$ $a^2(1+a)a^3-(a^7-a^6):a=2a^5$ $1{,}2(0{,}5p+0{,}7q)-1{,}5p(0{,}6-0{,}3q)-0{,}8q(1{,}1p+1)=$ $-0{,}3p+0{,}04q-0{,}43pq$ -35 m² n³ p + 7 m³ n³ p² = 7 m² n³ p (-5 + m p) = 7 m² n³ p (m p – 5) (x – 2 y) = -1 (2 y – x) a (x – y) – b(x – y) = (x – y) (a – b) (2 a – b) (m + n) – 2 (a – b) (m + n) = b (m + n) 24 x² y (3 a – b) – 18 x y² (b – 3 a) = 6 x y (3 a – b) (4 x + 3 y)
Multiplikation von Klammern	$(2p^2-\frac{3}{4}q^2)(\frac{1}{3}p-\frac{2}{5}q)=\frac{2}{3}p^3-\frac{4}{5}p^2q-\frac{1}{4}pq^2+\frac{3}{10}q^3$ $(z^2-5z+1)(z^2-z-1)=z^4-6z^3+5z^2+4z-1$

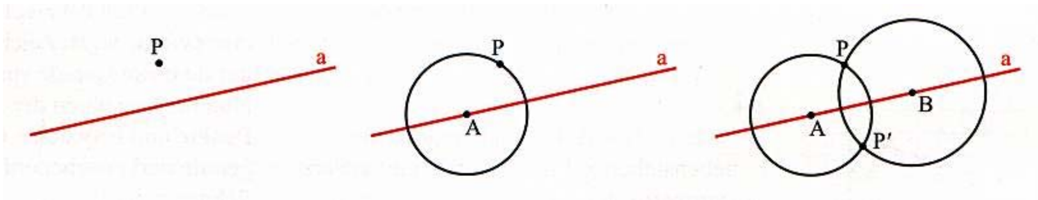
<u>Lösungsverfahren für Gleichungen</u> **Definition:** Gleichungen, die dieselbe Lösungsmenge besitzen, heißen <u>äquivalent</u>. **Äquivalenzumformungen** Addiert bzw. subtrahiert man auf beiden Seiten einer Gleichung dieselbe Zahl oder denselben Term, so erhält man eine äquivalente Gleichung. Multipliziert man beide Seiten einer Gleichung mit demselben von Null verschiedenen Term, so erhält man eine äquivalente Gleichung. Dividiert man beide Seiten einer Gleichung durch dieselbe von Null verschiedene Zahl, so erhält man eine äquivalente Gleichung.	x – 12 = 7 x – 12 + 12 = 7 + 12 <u>x = 19</u> 12 a + x = 7 a 12 a + x – 12 a = 7 a – 12 a <u>x = - 5 a</u> 0,5 x = 6 0,5 x • 2 = 6 • 2 <u>x = 12</u> 3 x = 12 3 x : 3 = 12 : 3 <u>x = 4</u>	Weitere Beispiele: $\frac{2}{7m}x = 3$ $\frac{2}{7m}x \bullet 7m = 3 \bullet 7m$ $2x = 21m$ $\underline{x = 10{,}5\,m}$ $\frac{1}{3}(23x - 4\frac{2}{5}x) = 21 - [(3{,}4x + 1{,}2) - \frac{2}{3}(8{,}1x - 4{,}5)]$ <u>x = 4</u> $8(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2})^2 - 18x(x+1) = 2(x-1)(2x+2) - (2x+2)^2$ <u>x = -5</u>
<u>Anwendungen</u> Löse mit Hilfe einer Gleichung!	In einem Terrarium sitzen Käfer und Spinnen. Die insgesamt 18 Tiere haben zusammen 120 Beine. Wie viele Tiere sind es jeweils?	Käfer: x Spinnen: 18 -x Gleichung: 6x+8(18 – x) = 120 X=12 Es sind 12 Käfer und 8 Spinnen.

<u>Prozentrechnung (Wiederholung und Vertiefung)</u> **Berechnung des Prozentwertes (PW):** Prozentsatz · Grundwert = Prozentwert $PS \cdot GW = PW$ **Berechnung des Prozentsatzes (PS):** Prozentwert : Grundwert = Prozentsatz $\frac{PW}{GW} = PS$ **Berechnung des Grundwertes (GW):** Prozentwert : Prozentsatz = Grundwert $\frac{PW}{PS} = GW$ **Diagramme**: Säulen-, Balken-, Kreis-, Liniendiagramm	In einem Fass befinden sich 320 l Most. Durch Gärung tritt ein Verlust von 9,5% ein. Wie viel Liter sind das? GW = 320 l; PS = 9,5 % = 0,095 PW = 320 l · 0,095 = 30,4 l Von seinem Monatsverdienst von 350 € spart Maxl 70 €. Welcher Prozentsatz ist dies? GW = 350 € ; PW = 70 € PS = PW : GW = 70 € : 350 € = 0,2 = 20% Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich sie um 40% vergrößere, erhalte ich 1022. PW = 1022, PS = 100%+40% = 140% GW = PW : PS = 1022 : 1,40 = 730 Auswerten und Zeichnen
<u>Mittelwert</u> Der (arithmetische Mittelwert) einer Menge von Zahlen oder Größen ergibt sich, indem die Summe der Zahlen oder Größen durch ihre Anzahl dividiert wird.	Welche Zahl muss für x eingesetzt werden, um den Mittelwert 45 zu erhalten? -2,5; -10; -20; x; -7,5; -15: -12,5 [-2,5+ (-10)+ (-20)+ x+ (-7,5)+ (-15) + (-12,5)]:7=45 x= 382,5

<u>Achsenspiegelung</u>	**<u>Abbildungsvorschrift der Achsenspiegelung:</u>** Bei gegebener Achse a wird jedem Punkt P der Ebene ein Bildpunkt P' auf folgende Weise zugeordnet: - Für $P \notin a$ liegt P' so, dass die Verbindungsstrecke [PP'] von der Achse a <u>rechtwinklig halbiert</u> wird. - Für $P \in a$ ist P = P' (P ist dann ein sogenannter <u>Fixpunkt</u>).  **<u>Eigenschaften der Achsenspiegelung:</u>** - Die Achsenspiegelung ist eine *längentreue, geradentreue* und (gegensinnig) *winkeltreue* Abbildung. - Die Achse a ist <u>Fixpunktgerade</u>, d.h. jeder Punkt $P \in a$ bleibt fest, ist Fixpunkt. - Jede Senkrechte zu a geht zwar nicht punktweise, aber als Ganzes in sich über, sie ist eine Fixgerade bezüglich der Achsenspiegelung an a.

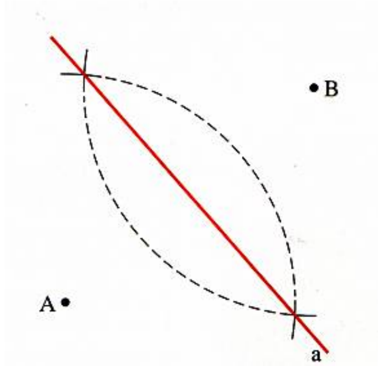
- Konstruktion von Spiegelpunkten

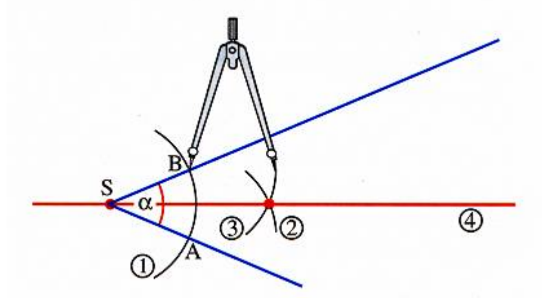
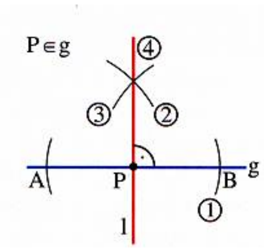
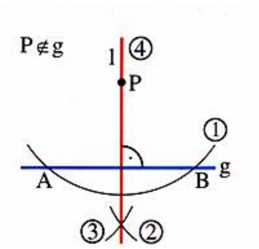
Man konstruiert den Spiegelpunkt P’ zu einem gegebenen Punkt P, indem man auf der Spiegelachse a zwei beliebige Punkte A und B wählt und die Kreise k_1 (A, $\overline{AP}$) und k_2 (B, $\overline{BP}$) zeichnet. $P' = k_1 \cap k_2$

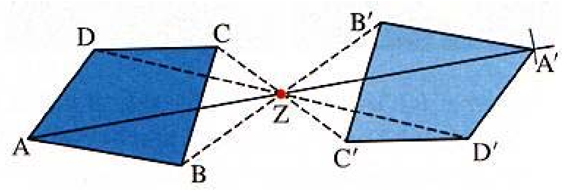


- Konstruktion der Symmetrieachse

Man konstruiert die Spiegelachse zu zwei zueinander symmetrischen Punkten A und B, indem man um A bzw. B je einen Kreis mit beliebigem, aber gleichem Radius zeichnet. Die Gerade durch die beiden Schnittpunkte der Kreise ist die Spiegelachse a.



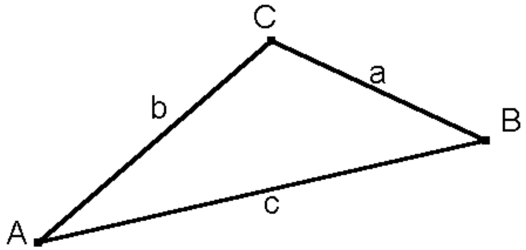
• Mittelsenkrechte	Man erhält die Mittelsenkrechte m zu einer Strecke [AB], indem man die Symmetrieachse zu den Punkten A und B konstruiert.
• Winkelhalbierende	Man erhält die Winkelhalbierende w_α eines Winkels α, indem man die Symmetrieachse zu den beiden Schenkeln des Winkels konstruiert. 
• Lote	Man erhält das Lot l zu einer Geraden g durch einen Punkt P, indem man zu zwei vom Punkt P gleich weit entfernten Punkten A und B der Geraden die Symmetrieachse konstruiert.   Lot errichten Lot fällen

Punktspiegelung	**Eigenschaften der Punktspiegelung:** - Die Punktspiegelung ist eine *längentreue*, *geradentreue* und (gleichsinnig) *winkeltreue* Abbildung. - Z ist der einzige Fixpunkt. - Jede Punktspiegelung kann durch eine Zweifachspiegelung an zueinander senkrechten Achsen, die sich im Zentrum Z schneiden, ersetzt werden.
• Konstruktion von Spiegelpunkten	Um einen Punkt A am Zentrum Z zu spiegeln, zeichnet man die Halbgerade [AZ und k (Z, $\overline{AZ}$). A' = [AZ $\cap$ k (Z, $\overline{AZ}$). 
• Konstruktion des Zentrums	Man verbindet zueinander symmetrische Punkte der Figur. Das Symmetriezentrum Z ist der Schnittpunkt zweier solcher Verbindungsgeraden.

Strecken- und Winkelübertragung

Musteraufgabe zur Streckenübertragung:

Zeige mittels Streckenübertragung,dass in untenstehendem Dreieck gilt: a + c > b.

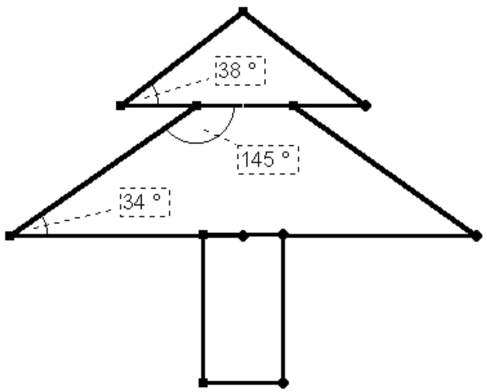


Lösung:

- Zeichne eine beliebige Halbgerade g; der Anfangspunkt sei C.
- $k(C;a) \cap g = \{B\}$
- $k(B;c) \cap g = \{A\}$
- $k(C;b) \cap g = \{T\}$
- Klar: $\overline{CA} > \overline{CT}$.

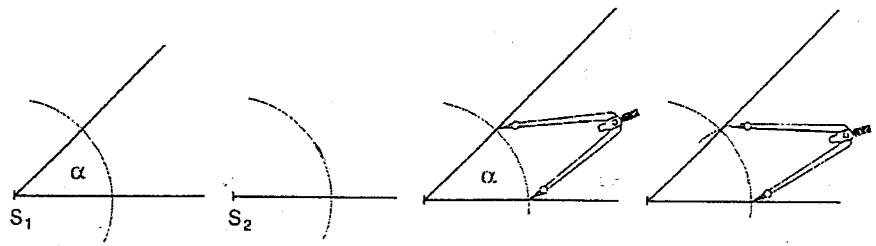
Musteraufgabe zur Winkelübertragung:

Übertrage die untenstehende Figur in Dein Heft. Ein Abmessen der Winkel mit dem Geodreieck ist nicht erlaubt.



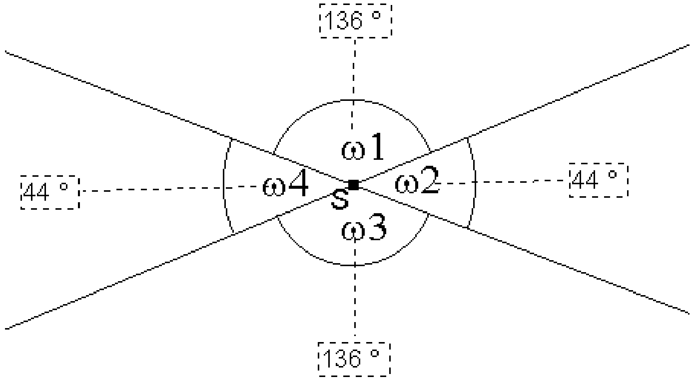
Lösung:

- Übertragung der jeweiligen Strecken siehe vorherige Aufgabe.
- Übertragung der jeweiligen Winkel mit Zirkel und Lineal:
  - Zeichne um den Scheitel des gegebenen Winkels und den neuen Scheitel je einen Kreisbogen mit demselben (beliebig großen) Radius.
  - Übertrage die zugehörige Sehne mit dem Zirkel vom ersten Bogen in den zweiten.

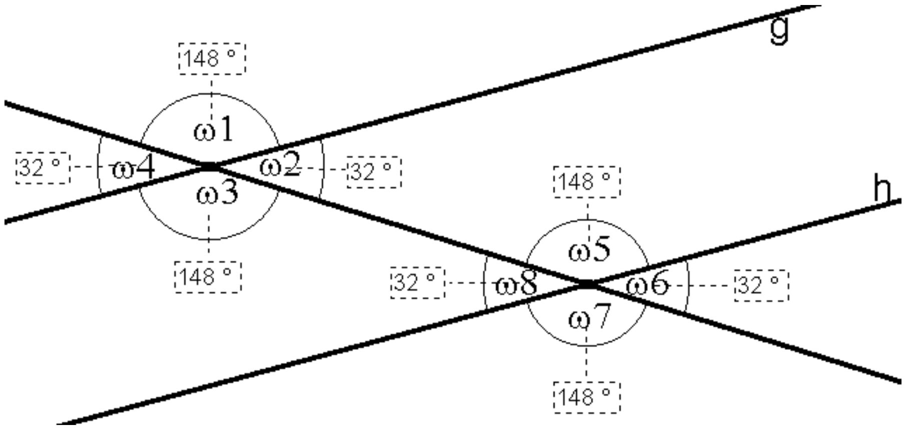


Winkelgesetze

Neben-, Scheitel-, Stufen- und Wechselwinkel



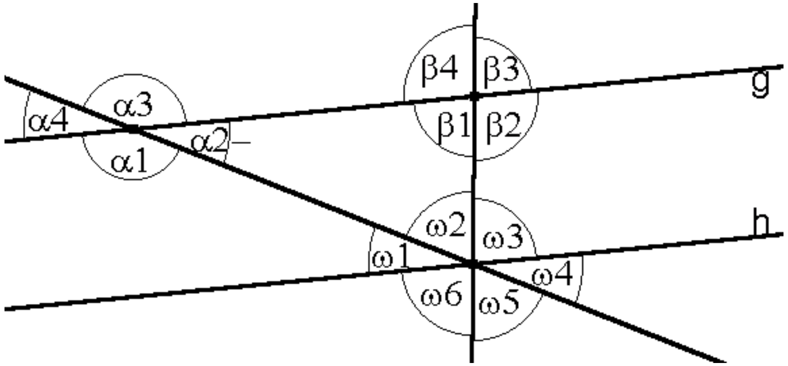
Nebenwinkel (NW) (z.B. ω1 und ω4) ergänzen sich zu 180°.
Scheitelwinkel (SW) (z.B. ω1 und ω3) sind gleich groß.



Stufenwinkel (StW) (z.B. ω1 und ω5 oder ω2 und ω6) oder Wechselwinkel (WW) (z.B. ω1 und ω7 oder ω2 und ω8) sind genau dann gleich groß, wenn die Geraden g und h parallel sind. In diesem Fall nennt man sie auch F-Winkel bzw. Z-Winkel.

Musteraufgabe zu den Winkelgesetzen:

In untenstehender Figur sind die Geraden g und h parallel. Der Winkel $\omega 1$ ist doppelt so groß wie $\omega 2$. Berechne für $\beta 1 = 84°$ alle übrigen Winkel. Begründe jeden der Rechenschritte.



Lösung:

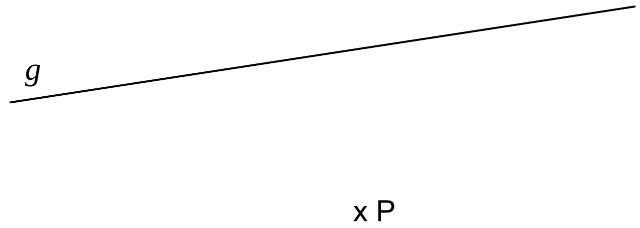
$\beta 3 = \beta 1 = 84°$ (SW)
$\beta 2 = 180° - \beta 1 = 180° - 84° = 96°$ (NW)
$\beta 4 = \beta 2 = 96°$ (SW)

$\omega 3 = \beta 3 = 84°$ (StW)
$\omega 6 = \omega 3 = 84°$ (SW)
$(\omega 1 + \omega 2) + \omega 3 = 180°$
$(2 \cdot \omega 2 + \omega 2) + \omega 3 = 180°$
$3 \cdot \omega 2 + \omega 3 = 180°$
$3 \cdot \omega 2 = 96°$
$\omega 2 = 32°$ (NW)
$\omega 1 = 2 \cdot \omega 2 = 64°$
$\omega 4 = \omega 1 = 64°$ (SW)
$\omega 5 = \omega 2 = 32°$(SW)

$\alpha 4 = \omega 1 = 64°$ (StW)
$\alpha 2 = \omega 1 = 64°$ (WW)
$\alpha 1 = 180° - 64° = 116°$ (NW)
$\alpha 3 = \alpha 1 = 116°$ (SW)

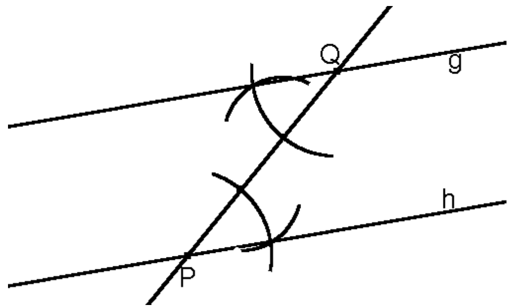
Konstruktion von Parallelen mit Hilfe von Wechselwinkeln

Die Eigenschaft, dass die Gleichheit von Wechselwinkeln die Parallelität der dazu gehörenden Geraden zur Folge hat, kann z.B. dazu genutzt werden, die Parallele h zu einer Geraden g durch einen Punkt P $(P \notin g)$ zu konstruieren.

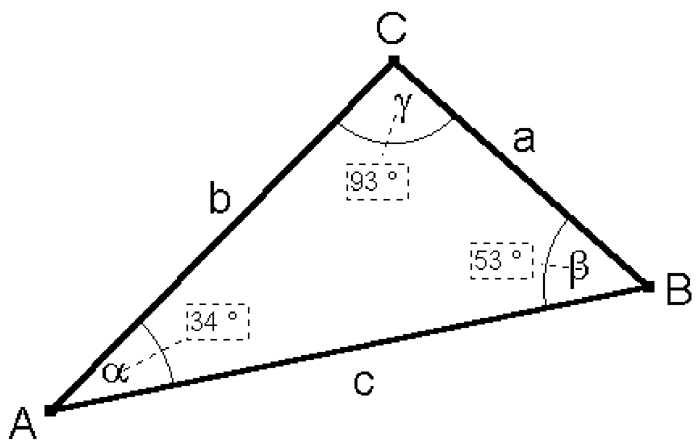
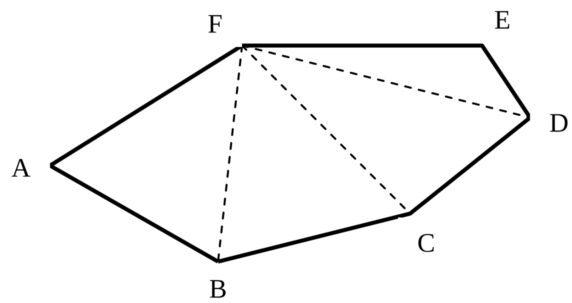


Lösung:

- P wird mit einem beliebigen Punkt Q von g verbunden.
- Der bei Q entstehende Winkel wird in P an PQ abgetragen (Winkelübertragung!), so dass gleiche Wechselwinkel entsehen.
-

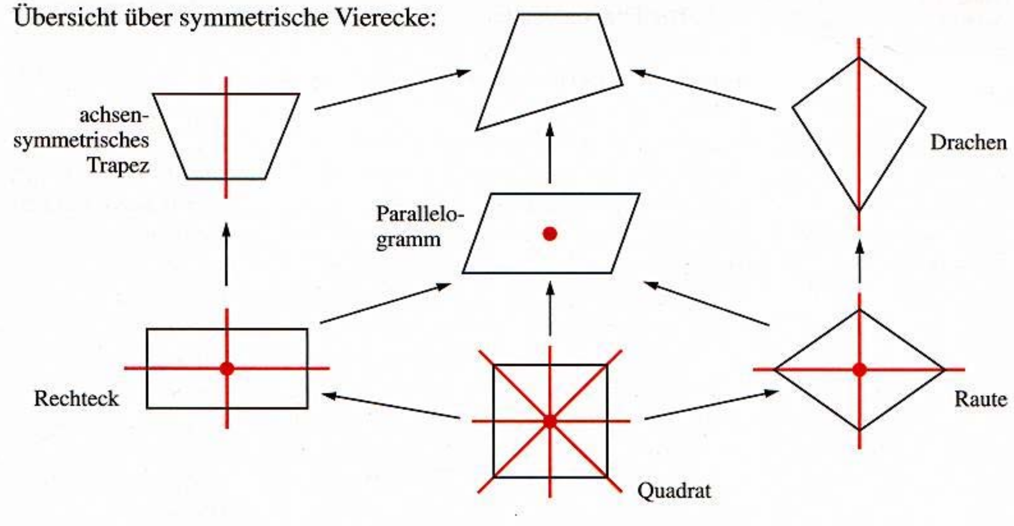


Analog kann man die Parallele zu einer Geraden g durch einen Punkt P $(P \notin g)$ mit Hilfe von Stufenwinkeln konstruieren.

Winkelsummensatz für Dreiecke	 In jedem Dreieck ergibt die Summe der drei Innenwinkel 180°.
Winkelsummensatz für n-Ecke	In jedem n-Eck beträgt die Summe der n Innenwinkel $(n – 2) \cdot 180°$. Begründung: Jedes n-Eck lässt sich in (n - 2) Dreiecke zerlegen. 

Symmetrische Vierecke

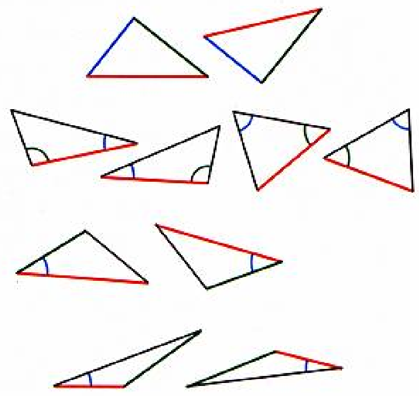
Übersicht über symmetrische Vierecke:



Kongruenz von Dreiecken

Die **Kongruenzsätze** (für Dreiecke):
Zwei Dreiecke sind zueinander kongruent, wenn sie:

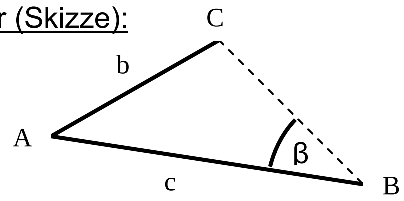
- in allen drei Seiten übereinstimmen **(SSS)**,
- in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen **(WSW** bzw. **SWW)**,
- in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen **(SWS)**,
- in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite übereinstimmen **(SsW)**.



Musteraufgabe:

Prüfe, ob die folgenden Angaben die Seitenlängen und Winkelgrößen eines Dreiecks das Dreieck eindeutig bestimmen. Führe die Konstruktion durch und gib für jedes Lösungsdreieck die restlichen Stücke an:
$b = 3{,}5$ cm; $c = 6{,}4$ cm und $\beta = 30°$.

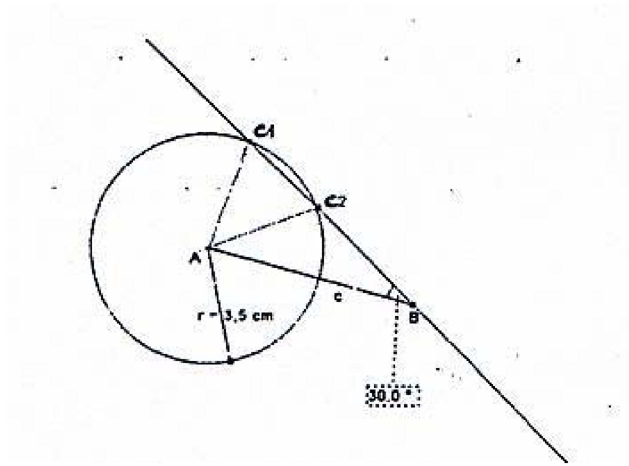
1.Planfigur (Skizze):



Das Dreieck ist durch diese Angaben nicht eindeutig bestimmt, da keiner der Kongruenzsätze zutrifft.

2.Konstruktion:

Es existieren zwei Lösungen:



Lsg. 1: ΔABC_1:
$a_1 = 6{,}95$ cm; $\alpha_1 = 83{,}8°$; $\gamma_1 = 66{,}2°$

Lsg. 2: ΔABC_2:
$A_2 = 4{,}08$ cm; $\alpha_2 = 35{,}5°$; $\gamma_2 = 114{,}5°$

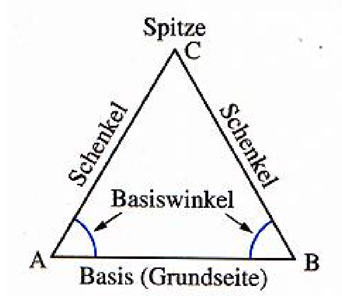
3. Konstruktionsbeschreibung:

1) c legt A und B fest
2) C liegt auf dem k(A;b) und dem freien Schenkel des Winkels β angetragen in B an [AB]

Besondere Dreiecke

- Gleichschenklige Dreiecke

Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt *gleichschenkliges Dreieck*. Die beiden gleich langen Seiten heißen *Schenkel*, die dritte Seite nennt man Grundseite oder *Basis*. Der gemeinsame Punkt der Schenkel wird als *Spitze* bezeichnet, die beiden der Basis anliegenden Winkel heißen Basiswinkel.



<u>Satz vom gleichschenkligen Dreieck:</u>

Trifft für ein Dreieck eine der folgenden Aussagen zu, so gelten auch die beiden anderen:

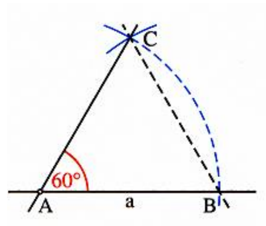
a) Das Dreieck ist gleichschenklig.
b) Das Dreieck ist achsensymmetrisch.
c) Das Dreieck besitzt zwei gleich große Winkel.

- Gleichseitiges Dreieck

<u>Besonderes gleichschenkliges Dreieck:</u>

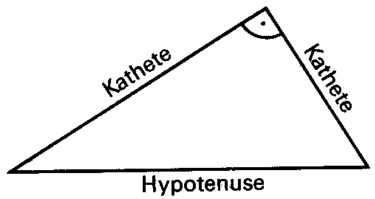
Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten und drei 60°-Winkeln heißt *gleichseitiges Dreieck*.

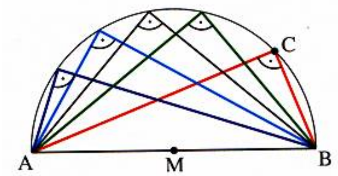
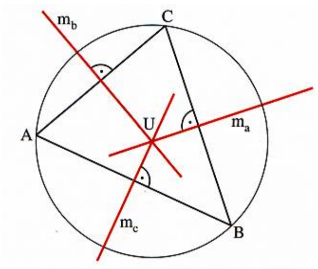
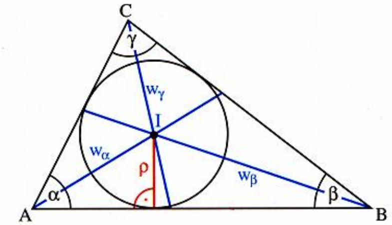
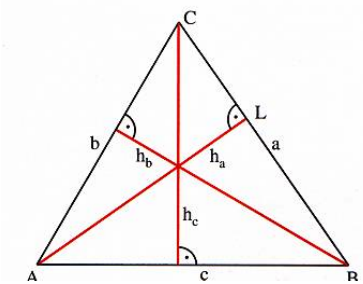
=> 60°-Winkel können durch Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks konstruiert werden.

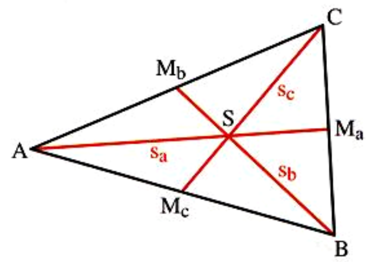


- Rechtwinklige Dreiecke

In rechtwinkligen Dreiecken heißen die beiden Seiten, die den rechten Winkel einschließen, *Katheten*, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite *Hypotenuse*.

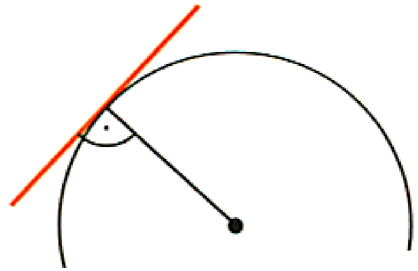


• Satz des Thales	Ein Dreieck ABC hat genau dann bei C einen rechten Winkel, wenn die Ecke C auf einem Halbkreis über [AB] liegt. 
<u>Transversalen im Dreieck</u> • Mittelsenkrechten und Umkreis	Die drei *Mittelsenkrechten* eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des *Umkreises*. Der Umkreis eines Dreiecks geht durch die drei Eckpunkte A, B, C. 
• Winkelhalbierende und Inkreis	Die drei *Winkelhalbierenden* eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des *Inkreises* des Dreiecks. Der Inkreis berührt jede Dreiecksseite in einem Punkt. 
• Höhen im Dreieck	Fällt man von einem Eckpunkt eines Dreiecks das Lot auf die gegenüberliegende Seite (oder deren Verlängerung), so erhält man die *Höhe* auf die entsprechende Seite. Die Höhen eines Dreiecks können innerhalb oder außerhalb des Dreiecks verlaufen. In jedem Dreieck schneiden sich die drei Höhen (oder deren Verlängerungen) in einem Punkt. 

• Seitenhalbierende im Dreieck	Eine *Seitenhalbierende* ist die Verbindungsstrecke einer Seitenmitte mit der ihr gegenüberliegenden Ecke. In jedem Dreieck schneiden sich die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt. Diesen Punkt nennt man auch *Schwerpunkt* des Dreiecks. 

Kreistangenten

Eine Kreistangente ist eine Gerade, die einen Kreis in *genau einem Punkt* berührt.



Die Tangente steht senkrecht auf dem Radius zum Berührpunkt.

- Konstruktion von Kreistangenten

Mit Hilfe des Thaleskreis kann man somit die Tangenten von einem Punkt P außerhalb des Kreises an einen gegebenen Kreis konstruieren.

Man konstruiert über [PM] den Thaleskreis. Er schneidet den Kreis um M in den Punkten B_1 und B_2. Die Geraden PB_1 und PB_2 sind dann die gesuchten Tangenten.