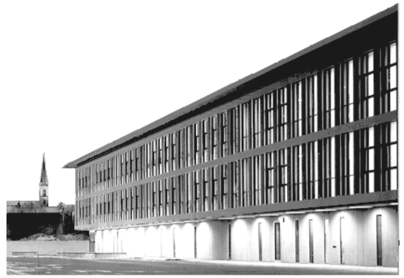
Gymnasium Eckental
Mathematisch-naturwissenschaftliches Gymnasium
Neusprachliches Gymnasium

Gymnasium Eckental Neunkirchener Straße 1 90542 Eckental



Grundwissen

Jahrgangsstufe: 9 G8

1. Wurzeln, Potenzen mit rationalem Exponenten

Definiton der n-ten Wurzel: Die nichtnegative Zahl a heißt n-te Wurzel ($n \in \mathbb{N}$) aus einer nichtnegativen Zahl b, wenn $a^n = b$ gilt. n heißt Wurzelexponent, b heißt Wurzelradikand. Schreibweise: $a = \sqrt[n]{b}$ **Wurzelgesetze:** $\left.\begin{array}{l} \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b};\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a} \end{array}\right\} a,b\in\mathbb{R}^+; m,n\in\mathbb{N}$ **Potenzen mit rationalen Exponenten:** $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ **(** $a\in\mathbb{R}^+; m\in\mathbb{Z}; n\in\mathbb{N}$ **)** **Potenzgesetze:** $\left.\begin{array}{l} a^r\cdot a^s = a^{r+s};\ \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \\ a^r\cdot b^r = (a\cdot b)^r \\ (a^r)^s = a^{r\cdot s} \end{array}\right\} a,b\in\mathbb{R}^+; r,s\in\mathbb{Q}$	Welche der folgenden Wurzeln sind nicht definiert? $\sqrt[5]{-2^6};\ \sqrt[3]{(-2)^6};\ \sqrt[-2]{a^4};\ \sqrt{x^{-8}}\ (x\neq 0)$ Berechne im Kopf: $\sqrt[3]{27};\ \sqrt[14]{(-5)^{14}};\ \sqrt{\frac{16}{81}};\ \sqrt[4]{1};\ \sqrt{0{,}01};\ \sqrt{a^{-6}}\ (a\neq 0)$ Bestimme jeweils die Definitionsmenge: $\sqrt{x-2};\ \frac{1}{\sqrt{3-x}};\ \sqrt{x^2+1};\ \sqrt[3]{-x};\ \sqrt{-3-x^6}$ Vereinfache mit Hilfe der Wurzelgesetze: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{128}};\ \sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25};\ \sqrt[3]{\sqrt[5]{15}}$ Radiziere teilweise: $\sqrt{175};\ \sqrt[3]{250};\ \sqrt[4]{48}$ (Bsp: $\sqrt{32} = \sqrt{16\cdot 2} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{2} = 4\cdot\sqrt{2}$) Schreibe als Potenz: $\sqrt[3]{5^2};\ \left(\sqrt[5]{3}\right)^4;\ \sqrt[3]{(-2)^4}$ Vereinfache die folgenden Terme soweit wie möglich. $a^2\cdot a^{-3};\ \frac{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{-4}}{b^2\cdot\sqrt{a}};\ \left(\sqrt[3]{a^2}\cdot b^{-1}\right)^5;\ 2\sqrt{b}+4a^{-1}+4b^{\frac{1}{2}}-\frac{6}{a}$

2. Quadratische Funktionen und Gleichungen

Binomische Formeln:

a) Plusformel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) Minusformel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) Plusminusformel: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Funktionsgleichungen quadratischer Funktionen:

- Allgemeine Form: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad (a \neq 0)$
- Scheitelform: $y = a \cdot (x-d)^2 + e$; Scheitelkoordinaten: $S(d \mid e)$
- Produktform: $y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$; Nullstellen: x_1 und x_2

Definitonsmenge: $D_f = \mathbb{R}$

Wertemenge: $W_f = \begin{cases} [e; +\infty[& \text{für } a > 0 \\ ]-\infty; e] & \text{für } a < 0 \end{cases}$

Beispiel für Scheitelbestimmung durch quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 6x + 4 = 2\left[x^2 - 3x + 2\right] = \\ &= 2\left[\underbrace{\left(x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)}_{\text{rechte Seite der Minusformel}} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\right] = \\ &= 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\right] = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] \\ &= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die Graphen quadratischer Funktionen heißen **Parabeln**, für $|a| = 1$ **Normalparabeln**.

Forme die folgenden Terme mit Hilfe der binomischen Formeln um.

$(x-3)^2$; $(2+x)^2$; $(3d-4)^2$; $(4-3b)(4+3b)$; $(0{,}5-a)(a+0{,}5)$

Schreibe die folgenden Terme als Potenz oder Produkt.

$x^2 - 6x + 9$; $25 - 4a^2$; $4m^2 + 9t^2 - 12mt$

Bestimme zu den folgenden quadratischen Funktionen jeweils den Scheitel sowie die Wertemenge und zeichne den Graphen:

$$f: x \mapsto x^2 - 8x + 14$$

$$g: x \mapsto -2x^2 - 8x - 1$$

$$h: x \mapsto 1 - 3x + \frac{1}{2}x^2$$

Gib jeweils eine Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion an,

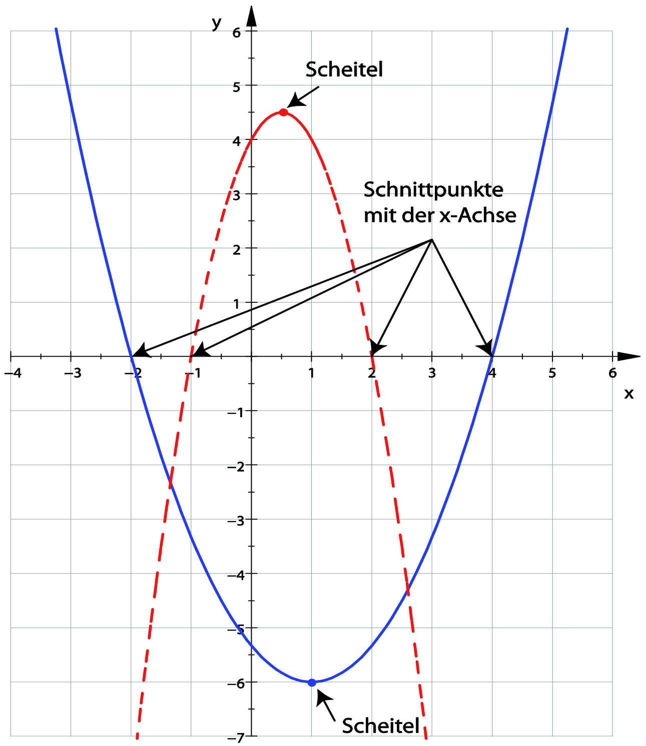
a) deren Graph durch den Punkt $P(-1 \mid 1{,}5)$ verläuft und den Scheitel $S(-2 \mid 3)$ besitzt.

b) die die Nullstellen 4 und -2 besitzt und deren Graph durch den Punkt $P(3 \mid -15)$ verläuft.

Die x-Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse heißen **Nullstellen**.

Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben, für $a < 0$ ist sie nach unten geöffnet.

Je größer $|a|$, desto enger ist die Öffnung der Parabel.



Die Nullstellen werden über die Bedingung $y = 0$ bestimmt. Durch Nullsetzen der allgemeinen Gleichung einer quadratischen Fkt. erhält man eine quadratische Gleichung:

$0 = ax^2 + bx + c$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lösungen existieren nur, wenn $b^2 - 4ac \geq 0$ gilt. Der Wurzelradikand $b^2 - 4ac$ heißt Diskriminante D.

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

a) $3x - 5 = 7x^2$
b) $8x + 3 = 2x^2 - 7$
c) $x^2 - 5x = 3 + x^2$
d) $-2 = \sqrt{48}\,x - 2x^2$

Bestimme jeweils alle Nullstellen.

$f: x \mapsto -4 \cdot (x+5) \cdot (7-x)$

$g: x \mapsto 3x^2 + 15x + 12$

$h: x \mapsto 2x + 16 - \frac{1}{2}x^2$

$s: x \mapsto 2x^2 + 4x + 3$

$t: x \mapsto 3x^2 + 12 - 12x$

Gegeben sind die Funktionsterme zweier Funktionen f und g. Bestimme alle Schnittpunkte graphisch und rechnerisch.

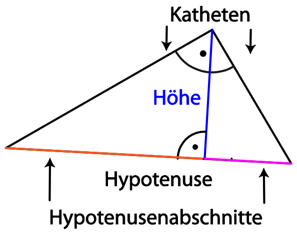
a) $f(x) = x^2 - 2x - 2;\; g(x) = x + 2$
b) $f(x) = -x^2 + 2;\; g(x) = x^2 + 8x + 8$

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen:

a) $(x-3)(x+5) \leq 0$
b) $-2 \cdot (x+2) \cdot (x+5) < 0$

3. Satzgruppe des Pythagoras

Rechtwinkliges Dreieck

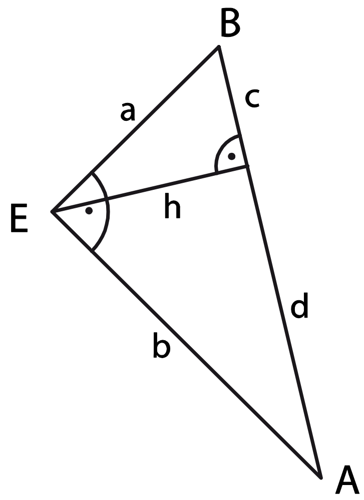


Höhensatz
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe flächengleich zum Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

Kathetensatz
In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich zum Rechteck aus der Hypotenuse und dem an der betrachteten Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitt.

Satz des Pythagoras
In jedem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse.

Gib für das Dreieck ABE den Satz des Pythagoras, den Höhensatz sowie für beide Katheten den Kathetensatz als Formel an!



Vervollständige die folgende Tabelle! Runde die Ergebnisse sinnvoll!

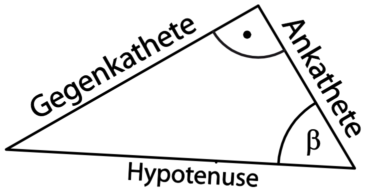
	a	b	c	d	h
a)			2,0 cm	5,0 cm	
b)	4,0 cm	5,0 cm			
c)				4,0 cm	2,5 cm

4. Trigonometrische Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck

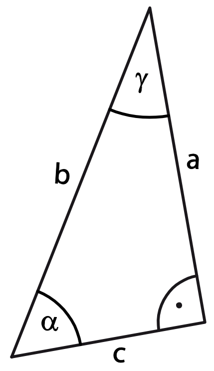
$$\text{Sinus eines Winkels} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Kosinus eines Winkels} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Tangens eines Winkels} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

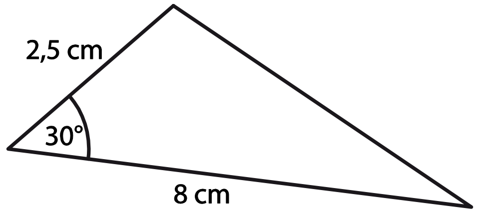


Vervollständige die folgende Tabelle ohne Verwendung des Satzes des Pythagoras!
Runde die Ergebnisse sinnvoll!



	a	b	c	α	γ
a)	5,0 cm	9,0 cm			
b)			4,0 cm		25°
c)		4,5 cm		48°	
d)	4,0 cm	6,0 cm			

Berechne den Flächeninhalt des folgenden Dreiecks!



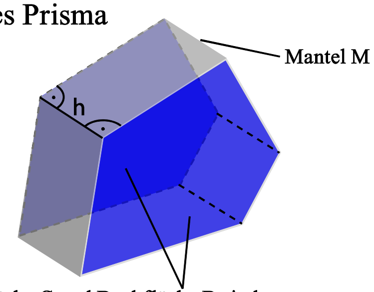
5. Prisma, Pyramide, Zylinder und Kegel

Prisma

Gerades Prisma

Volumen: $V = G \cdot h$

Oberfläche: $V = 2 \cdot G + M$



Grundfläche G und Deckfläche D sind kongruente n-Ecke, die in parallelen Ebenen mit dem Abstand h liegen.

Von einem **geraden Prisma** spricht man, wenn der Mantel nur aus Rechtecken besteht.

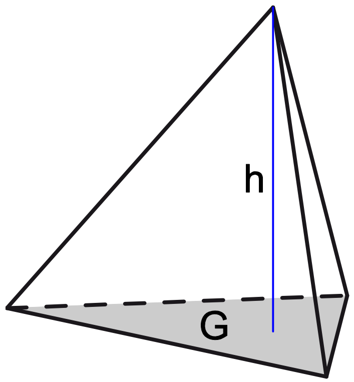
Berechne das Volumen und die Oberfläche eines 4,0 cm hohen geraden Prismas, dessen Grundfläche

a) ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 5,0 cm und 6,0 cm ist.
b) ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 4,0 cm ist.

Pyramide

Volumen: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Oberfläche: $O = G + M$



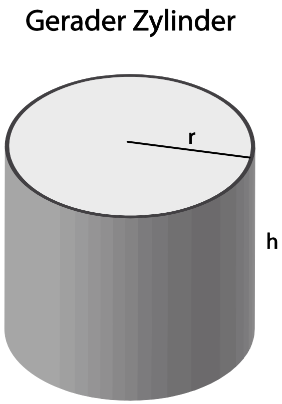
Eine Pyramide heißt **gerade**, wenn alle Seitenkanten gleich lang sind. Die Grundfläche besitzt deshalb einen Umkreis, dessen Mittelpunkt der Fußpunkt des Lotes von der Pyramidenspitze auf die Grundflächenebene ist.

Eine gerade Pyramide hat ein Quadrat mit der Seitenlänge 4,0 cm als Grundfläche. Die Höhe der Pyramide beträgt 6,0 cm.

a) Zeichne ein Netz dieser Pyramide.
b) Zeichne ein Schrägbild dieser Pyramide.
c) Berechne Oberflächeninhalt und Volumen dieser Pyramide.
d) Bestimme mit Hilfe eines Stützdreiecks den Neigungswinkel der Seitenkanten gegen die Grundfläche.
Hinweis: Die Höhe h und die betrachtete Seitenkante sind Seiten des Stützdreiecks.

<table>
<tr>
<td>

Zylinder
Volumen: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$



Nur für den **geraden Zylinder** (die Verbindungsstrecke der beiden Kreismittelpunkte steht senkrecht auf den Kreisebenen) gilt:

Mantel: $M = 2\pi \cdot r \cdot h$

Oberfläche: $O = 2\pi \cdot r(r + h)$

</td>
<td>

Ein Zylinder besitzt einen Radius von 5,0 dm. Seine Höhe beträgt 1,20 m. Berechne sein Volumen und den Inhalt seiner Oberfläche.

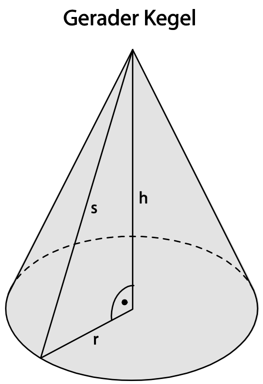
Eine zylinderförmige Walze, die in der Landwirtschaft als Wiesenwalze eingesetzt wird, hat den Durchmesser d = 1,05 m und die Länge $l = 2{,}10$ m.

a) Welche Wiesenfläche wurde geglättet, wenn sich die Walze zehnmal gedreht hat?

b) Was wiegt die Walze, wenn sie aus Stahl und hohl ist (Wandstärke 0,80 cm)? Hinweis: $1{,}0\ \text{cm}^3$ Stahl wiegt $7{,}9\ \text{g}$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Kegel
Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$



Nur für den **geraden Kegel** (der Fußpunkt des Lotes von der Spitze auf die Kreisebene ist der Mittelpunkt des Kreises) gilt:
Länge einer Mantellinie: $s = \sqrt{r^2 + h^2}$

Mantel: $M = \pi \cdot r \cdot s$

Oberfläche: $O = \pi \cdot r \cdot (r + s)$

</td>
<td>

Der Mantel eines Kegels ist ein Kreissektor, dessen Radius 4,0 cm und dessen Bogenlänge 12,0 cm beträgt. Bestimme den Radius, die Höhe, das Volumen und den Inhalt der Oberfläche des Kegels.

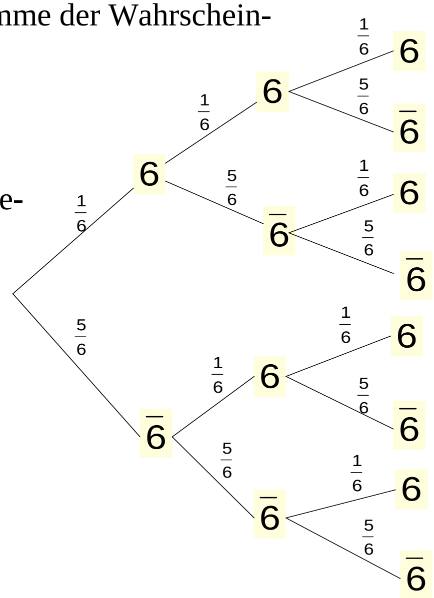
Ein kegelförmiges Sektglas wird „halbvoll“ eingeschenkt, d.h. bis zur halben Höhe. Welchen Anteil des Gesamtvolumens des Glases nimmt der Sekt ein?

</td>
</tr>
</table>

6. Mehrstufige Zufallsexperimente

1. Pfadregel:
   Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, dem genau ein Pfad in einem Baumdiagramm entspricht, ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs dieses Pfades.
2. Pfadregel:
   Gehören zu einem Ereignis mehrere Pfade, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade.

Beispiel:
Ein Würfel wird dreimal hintereinander geworfen.



$P(\text{"dreimal 6"}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

$P(\text{"nur 3. Versuch 6"}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$

$P(\text{"genau zweimal 6"}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

In einer Urne befinden sich 4 grüne und 2 rote Kugeln. Es werden nacheinander 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

1. Zeichne ein Baumdiagramm.
2. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
   a) nur die erste gezogene Kugel rot ist.
   b) nur grüne Kugeln gezogen werden.
   c) genau eine rote Kugel gezogen wird.
   d) die dritte gezogene Kugel grün ist.

Ein Biathlet hat eine Treffsicherheit von 85 %. Er schießt auf 5 Scheiben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er

a) alle Scheiben trifft?
b) keine einzige Scheibe trifft?
c) genau 4 Scheiben trifft?

Irene und Claudia schießen abwechselnd mit einer Armbrust auf einen Apfel. Die Trefferwahrscheinlichkeit von Irene beträgt 40 %, die von Claudia 60 %. Irene beginnt. Das Wettschießen ist beendet, wenn der Apfel getroffen wurde. Jedes Mädchen hat maximal zwei Versuche.

a) Zeichne ein Baumdiagramm.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Irene gewinnt?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Claudia gewinnt?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Mädchen den Apfel trifft?