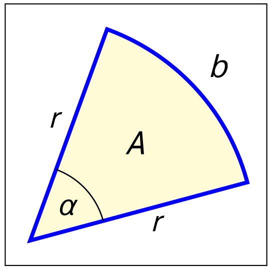
1 Kreissektoren und Kugeln

Kreissektor mit dem Mittelpunktswinkel α und dem Radius r:



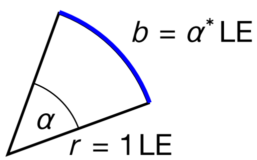
Bogenlänge:

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$

Flächeninhalt:

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$

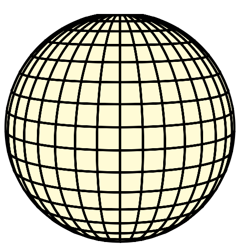
Bogenmaß α^* eines Winkels α im Gradmaß:



Das Bogenmaß α^* eines Winkels α ist die Maßzahl desjenigen Bogens, die der Mittelpunktswinkel α aus dem Einheitskreis ausschneidet. Zusammenhang zwischen dem Bogenmaß α^* und dem Gradmaß α:

$$\frac{\alpha^*}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°}$$

Kugel mit dem Radius r:



Volumen:

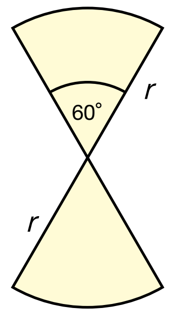
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Oberfläche:

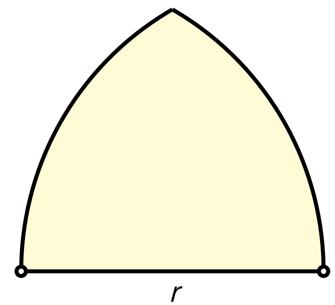
$$O = 4\pi r^2$$

Berechne jeweils den Umfang u und den Flächeninhalt A der folgenden Figuren in Abhängigkeit von r.

(a)



(b)



Vervollständige die folgende Tabelle. Gib das Bogenmaß als Vielfaches der Kreiszahl π an.

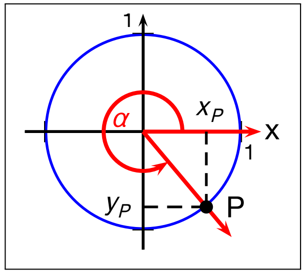
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	360°	540°	720°
α^*							π			

Vervollständige die folgende Tabelle. Runde sinnvoll.

α	12,8°		75,0°		195°		350°		1000°	
α^*		0,25		1,14		2,90		3,47		20

1. Welchen Radius (in cm) besitzt eine Kugel mit einem Volumen von $1\,m^3$? Vergleiche diesen Radius mit der Kantenlänge eines Würfels mit dem gleichen Volumen!
2. Wie ändert sich das Volumen einer Kugel, wenn der Radius doppelt so groß wird?
3. Wie muss man den Radius einer Kugel verändern, wenn sich deren Oberfläche verdoppeln soll?

2 Sinus und Kosinus



Der nichtnegative Teil der x-Achse wird um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung gedreht. Der zweite Schenkel dieses Drehwinkels schneidet den Einheitskreis im Punkt $P(x_P|y_P)$. Dabei gilt:

$$x_P = \cos\alpha$$
$$y_P = \sin\alpha$$

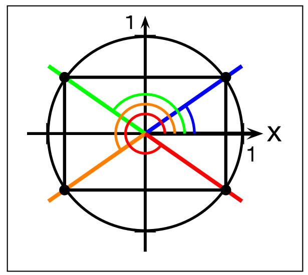
Sinus- bzw. Kosinusfunktion:
Jeder reellen Zahl x (Winkel im Bogenmaß) wird als Funktionswert $\sin x$ bzw $\cos x$ zugeordnet. Beide Funktionen sind periodisch mit der Periode 2π.
$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$
$\cos(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$

Vervollständige die folgende Tabelle.

α	0°	90°	180°	270°	360°	450°	540°	720°
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								

Vervollständige die folgende Tabelle.

	$0° < \alpha < 90°$	$90° < \alpha < 180°$	$180° < \alpha < 270°$	$270° < \alpha < 360°$
$\sin\alpha$	+			
$\cos\alpha$	+			



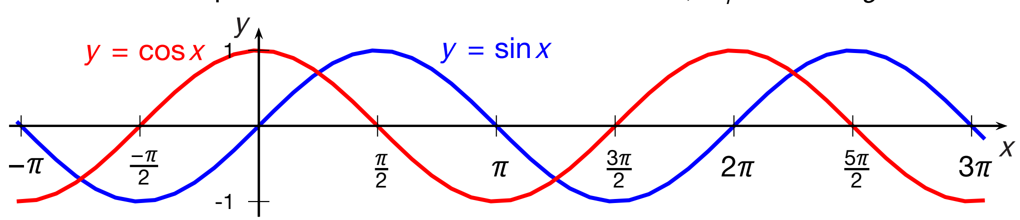
Bestimme alle Winkel α mit $0° < \alpha < 360°$ für die gilt:

a) $\sin\alpha = 0{,}5$ b) $\cos\alpha = -0{,}5$

c) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ d) $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Hinweis: Überlege anhand der nebenstehenden Zeichnung, welche Winkel die gleiche y- und welche Winkel die gleiche x-Koordinate besitzen!

Zeichne die Graphen der Funktionen $f : x \longmapsto \sin x$; $D_f = \mathbb{R}$ und $g : x \longmapsto \cos x$; $D_g = \mathbb{R}$.



3 Exponentielles Wachstum, Exponentialfunktion

Eine Größe X heißt exponentiell wachsend, wenn in einer Bezugszeit T der Wert der Größe stets um den **Wachstumsfaktor** a wächst. Dabei gilt

$$X(t+T) = a \cdot X(t).$$

$X(t+T)$: Wert der Größe X zur Zeit $t+T$
$X(t)$: Wert der Größe X zur Zeit t

Allgemeines Wachstumsgesetz für exponentielles Wachstum:

$$X(t) = X_0 \cdot a^{\frac{t}{T}}$$

Dabei ist X_0 der Wert der Größe X zur Zeit $t = 0$.
a ist der Wachstumsfaktor mit der Bezugszeit T.

In einer Bakterienkultur gibt es 100 Bakterien zur Zeit $t = 0$. Alle sechs Stunden verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien durch Zellteilung. Vervollständige die folgenden Tabellen und gib das zugehörige Wachstumsgesetz an.

Zeit in h	Anzahl	
0	100	
		$\cdot 2$
6	200	
		$\cdot 2$
12		
		$\cdot 2$
18		
$6 \cdot n$		

Zeit in h	Anzahl		
0	100		
		$\cdot a_2$	
2			
		$\cdot a_2$	$\cdot 2$
4			
		$\cdot a_2$	
6	200		

Bezugszeit in Stunden	Wachstumsfaktor
1	
2	$\sqrt[3]{2}$
3	
6	2
12	

Jod 131 zerfällt mit einer Halbwertszeit von 8 Tagen. Zu Beginn der Beobachtung sind 100 mg vorhanden.

a) Gib das Wachstumsgesetz an, dass den radioaktiven Zerfall beschreibt.

b) Wieviel Prozent des jeweils noch vorhandenen Jods zerfällt an einem Tag?

c) Wieviel Jod ist nach 20 Jahren noch vorhanden?

Das Wachstumsgesetz für exp. Wachstum kann als Funktionsterm einer Exponentialfunktion
$f: x \longmapsto b \cdot a^x$; $D_f = \mathbb{R}$
($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$; $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) aufgefasst werden.

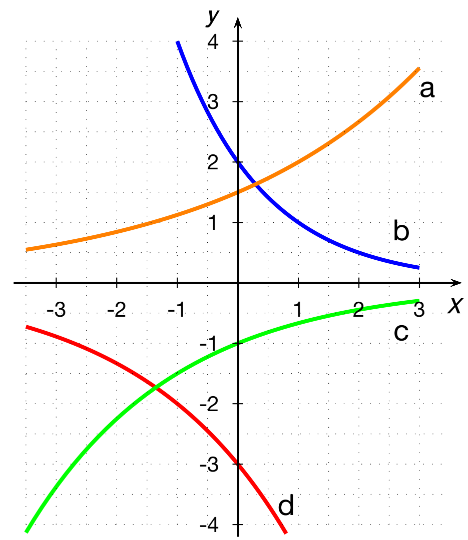
Eigenschaften:

- Schnittpunkt mit der y-Achse: $S(0; b)$
- Keine Nullstellen
- Monotonie

Monotonie	$b > 0$	$b < 0$
$0 < a < 1$	s. m. f	s. m. w
$a > 1$	s. m. w	s. m. f

s. m. f.: streng monoton fallend
s. m. w.: streng monoton wachsend

Gegeben sind die Graphen von Exponentialfunktionen. Bestimme jeweils den Funktionsterm!



4 Exponentialgleichungen, Logarithmus

Die Lösung x der Exponentialgleichung $a^x = b$ mit $a > 0; a \neq 1; b > 0$ heißt **Logarithmus** von b zur Basis a.
$x = \log_a b$
Dekadischer Logarithmus: $\log_{10} b = \lg b$

Logarithmengesetze ($a \in \mathbb{R}^+; a \neq 1;\ c,d \in \mathbb{R}^+$)

$$\log_a(c \cdot d) = \log_a c + \log_a d \qquad (1)$$
$$\log_a \frac{c}{d} = \log_a c - \log_a d \qquad (2)$$
$$\log_a c^x = x \cdot \log_a c \qquad (3)$$
$$\log_a c = \frac{\lg c}{\lg a} \qquad (4)$$

Aufgabenbeispiel: Löse die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
3^x \cdot 2^{x+2} &= 5 \cdot 8^{2x} && |\ lg(..)\\
\lg\left(3^x \cdot 2^{x+2}\right) &= lg\left(5 \cdot 8^{2x}\right) && |\ \text{Gesetz (1)}\\
\lg\left(3^x\right) + \lg\left(2^{x+2}\right) &= lg(5) + \lg\left(8^{2x}\right) && |\ \text{Gesetz (3)}\\
x \lg 3 + (x+2)\lg 2 &= \lg 5 + 2x\lg\left(2^3\right)\\
x\lg 3 + x\lg 2 + 2\lg 2 &= \lg 5 + 6x\lg 2\\
x\lg 3 - 5x\lg 2 &= \lg 5 - 2\lg 2\\
x(\lg 3 - 5\lg 2) &= \lg 5 - 2\lg 2\\
x &= \frac{\lg 5 - 2\lg 2}{\lg 3 - 5\lg 2}
\end{aligned}$$

1. Schreibe die folgenden Gleichungen in der Form $x = \log_a b$. Bestimme x.

   a) $2^x = 128$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$ c) $10^x = 0{,}0001$ d) $5^{-x} = 625$

2. Schreibe die folgenden Terme als Potenz.

   a) $2a - 1 = \log_b c$ b) $u = \lg v$ c) $-4 = \lg x$ d) $-5 = \log_2 y$

3. Zerlege soweit wie möglich!

   a) $\log_2 xy$ b) $\lg(10a^4)$ c) $\log_6(9 + 27)$ d) $\lg \frac{a^2}{\sqrt{10}}$

4. Fasse zusammen und vereinfache (falls es überhaupt möglich ist)!

   a) $\lg 125 + \lg 8$ b) $\log_3 162 - \log_3 2$ c) $5 - 4\lg 0{,}001$ d) $3\lg a + 4\lg b$

4. Bestimme die Lösungsmenge!

   a) $3 \cdot 10^{2x+3} = 300$
   b) $8^x \cdot 2^{x+1} = 4$
   c) $6^x \cdot 3^{x+3} = 27 \cdot 2^x$

5 Ganzrationale Funktionen

Eine Funktion f mit

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots a_1 \cdot x + a_0\ ; D_f = \mathbb{R}$$

$(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R};\ a_n \neq 0;\ n \in \mathbb{N})$

heißt ganzrationale Funktion.

Die reellen Zahlen $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ heißen Koeffizienten. Der größte vorkommende Exponent n heißt Grad der ganzrationalen Funkion.

Jede ganzrationale Funktion mit dem Grad n besitzt höchstens n Nullstellen.

Ist die Zahl x_0 eine Nullstelle einer ganzrationalen Funktion f, so kann der Funktionsterm von f in der Form $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$ geschrieben werden. $g(x)$ ist der Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion mit dem Grad $n - 1$. Der Funktionsterm von g kann durch Polynomdivision bestimmt werden.

Eine Nullstelle heißt k-fache Nullstelle der ganzrat. Funktion f, wenn der Funktionsterm von f in der Form $f(x) = (x - x_0)^k \cdot h(x)$ geschrieben werden kann, wobei $h(x)$ der Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion mit einem um k ($k \in \mathbb{N}$) kleineren Grad als n und x_0 keine Nullstelle von h ist. An Nullstellen mit ungeradzahliger Vielfachheit ändert sich das Vorzeichen der Funktionswerte, an Nullstellen mit geradzahliger Vielfachheit nicht.

Aufgabenbeispiel:
Bestimme alle Nullstellen der Funktion $f : x \longmapsto -2x^3 - x^2 + 4x + 3\ ;\ D_f = \mathbb{R}$. Gib deren Vielfachheit an!

- Bestimmung einer Nullstelle durch Probieren oder mit der Wertetabellenfunktion des Taschenrechners:
  $x_1 = -1$ durch Probieren, denn: $-2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 3 = 0$
- Polynomdivision des Funktionsterms durch $x - (-1) = x + 1$:

$$\begin{array}{l}
(-2x^3 - x^2 + 4x + 3) : (x + 1) = -2x^2 + x + 3 \\
\underline{-(-2x^3 - 2x^2)} \\
\qquad x^2 + 4x \\
\quad \underline{-(x^2 + x)} \\
\qquad\qquad 3x + 3 \\
\qquad\quad \underline{-(3x + 3)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

- Der Funktionsterm kann nun in der faktorisierten Form $f(x) = (x + 1) \cdot (-2x^2 + x + 3)$ angegeben werden. Weitere Nullstellen existieren, wenn der Faktor $-2x^2 + x + 3$ null wird.

$$-2x^2 + x + 3 = 0$$
$$x_{2/3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-2) \cdot 3}}{2 \cdot (-2)}$$
$$x_{2/3} = \frac{-1 \pm 5}{-4}$$
$$x_2 = -1\ ;\ x_3 = \frac{3}{2}$$

- Der Funktionsterm kann nun in einer vollständig faktorisierten Form angegeben werden:

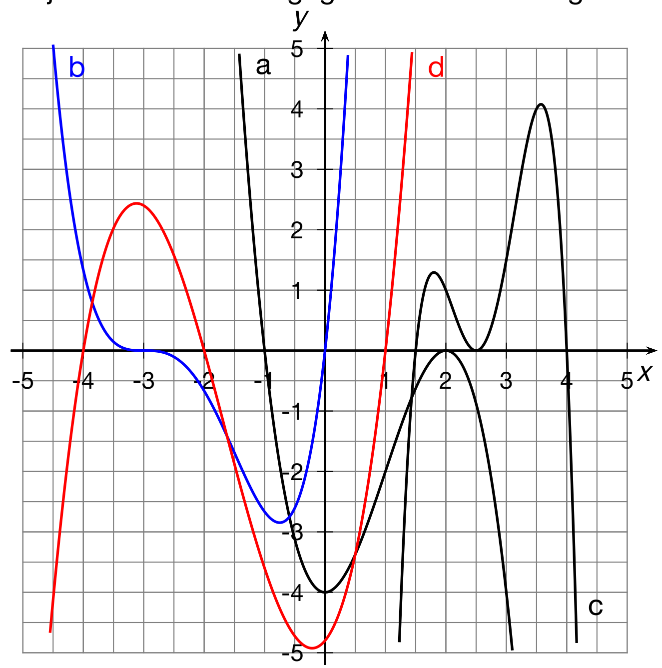
$$f(x) = -2(x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - \frac{3}{2}) = -2 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - \frac{3}{2})^1$$

Die Nullstellen der Funktion sind $x_1 = -1$ mit der Vielfachheit 2 (doppelte Nullstelle) und $x_3 = \frac{3}{2}$ mit der Vielfachheit 1 (einfache Nullstelle).

Der Koeffizient a_n vor der Potenz von x mit dem größten Exponenten n bestimmt den Verlauf der ganzrationalen Funktion für sehr kleine ($x \to -\infty$) und sehr große ($x \to \infty$) x-Werte:

Verlauf	$a_n > 0$	$a_n < 0$
n ungerade	links unten nach rechts oben	links oben nach rechts unten
n gerade	links oben nach rechts oben	links unten nach rechts unten

Ordne den im folgenden Koordinatensystem gezeichneten Graphen ganzrationaler Funktionen jeweils eine der angegebenen Funktionsgleichungen zu:



1. $y = -(x+4)^2 \cdot (x+2) \cdot (x-1)$
2. $y = \frac{1}{3}x \cdot (x+3)^3$
3. $y = -4(x - \frac{3}{2}) \cdot (x - \frac{5}{2})^2 \cdot (x-4)$
4. $y = -(x-2)^2 \cdot (x-1)$
5. $y = \frac{3}{5}(x+4) \cdot (x^2 + x - 2)$
6. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$
7. $y = (x-2)^2 \cdot (x+1)$

6 Lineare Transformationen

- Streckung bzw. Stauchung des Graphen von g mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ in x-Richtung: $f(x) = g(b \cdot x)$

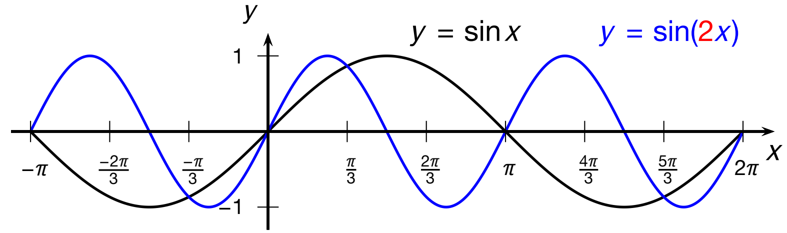
  Im Funktionsterm von g wird jedes Vorkommen von x durch $b \cdot x$ ersetzt.
- Verschiebung des Graphen von g um d Einheiten in x-Richtung (nach rechts): $f(x) = g(x - d)$

  Im Funktionsterm von g wird jedes Vorkommen von x durch $(x - d)$ ersetzt.
- Streckung des Graphen von g mit dem Faktor a in y-Richtung (nach oben): $f(x) = a \cdot g(x)$

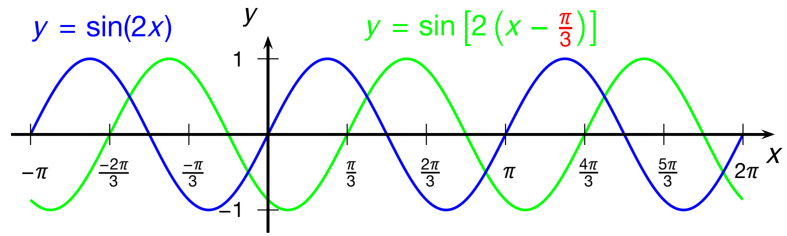
  Der Funktionsterm von g wird mit a multipliziert.
- Verschiebung des Graphen von g um e Einheiten in y-Richtung: $f(x) = g(x) + e$

  Zum Funktionsterm von g wird e addiert.

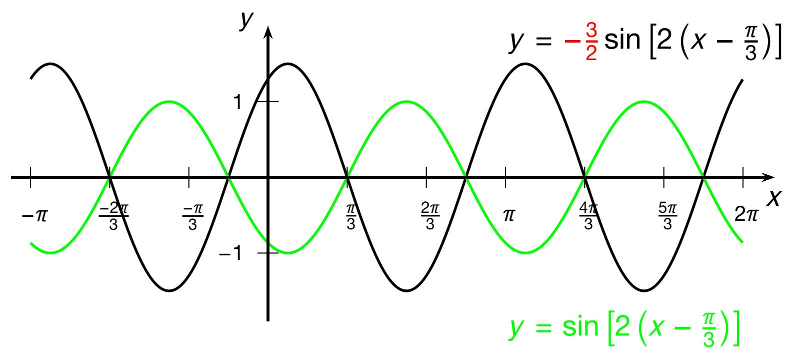
Zeichne den Graphen der Funktion $f : x \longmapsto -\frac{3}{2}\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]$; $D_f = \mathbb{R}$.



Der Ausgangsgraph wird mit dem Faktor $1/2$ in x-Richtung gestreckt.



Der in x-Richtung gestreckte Graph wird um $\frac{\pi}{3}$ Einheiten in x-Richtung verschoben.



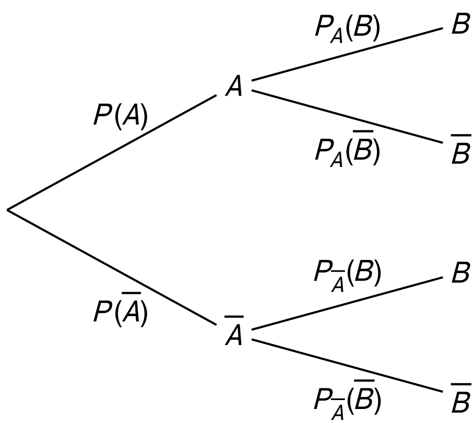
Der in x-Richtung gestreckte und verschobene Graph wird mit dem Faktor $-\frac{3}{2}$ in y-Richtung gestreckt.

7 Bedingte Wahrscheinlichkeit, Anwendung der Pfadregeln

Bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B unter der Bedingung, dass das Ereignis A eingetreten ist:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Baumdiagramm eines mehrstufigen Zufallsexperiements:



1. Eine Klasse setzt sich aus 14 Mädchen und 8 Jungen zusammen. 11 Schüler, darunter 5 Jungen interessieren sich für Fußball. Ein Schüler dieser Klasse wird zufällig ausgewählt.
   a) Zeichne eine Vierfeldertafel.
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Mädchen ausgewählt, das sich für Fußball interessiert?
   c) Ein Junge wird ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit interessiert er sich nicht für Fußball?
   d) Zeichne zwei verschiedene, vollständig beschriftete Baumdiagramme zu diesem Zufallsexperiment.
2. In einer Fabrik wird ein bestimmter Computerchip hergestellt. 60 % der Gesamtproduktion dieses Chips erfolgen in einer hochmodernen Anlage, der restliche Anteil in einer älteren Anlage. Von den Chips, die in der älteren Anlage produziert werden, sind 5 % defekt. 98 % der Chips, die in der neuen Anlage hergestellt werden, funktionieren tadellos.
   a) Zeichne ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm!
   b) Berechne, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewählter Chip defekt ist!
   c) Ein zufällig aus der Produktion ausgewählter Chip erweist sich als defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde dieser Chip in der älteren Anlage produziert?
   d) Zeichne ein weiteres vollständig beschriftetes Baumdiagramm, dass sich vom Baumdiagramm von Teilaufgabe a) grundlegend inhaltlich unterscheidet!