Grundwissen M 8

Funktionen

Zuordnung: Einer Größe x wird eine andere Größe y zugeordnet: $x \mapsto y$ (Zuordnungsvorschrift)

Funktion: Eine Zuordnung $x \mapsto y = f(x)$, die jedem x-Wert **genau einen** y-Wert zuordnet, heißt eindeutige Zuordnung oder Funktion f.

Wichtige Schreibweisen:

Funktionswert:	$y = f(x)$
Funktionsterm:	$f(x) = -x^2 + 4$
Funktionsgleichung:	$y = -x^2 + 4$
Funktionsvorschrift:	$f: x \mapsto -x^2 + 4$

Die Definitionsmenge D_f ist die Menge aller Zahlen, die man für x einsetzen darf.

Die Wertemenge W_f ist die Menge aller y-Werte, die sich durch Einsetzen aller x-Werte ergeben.

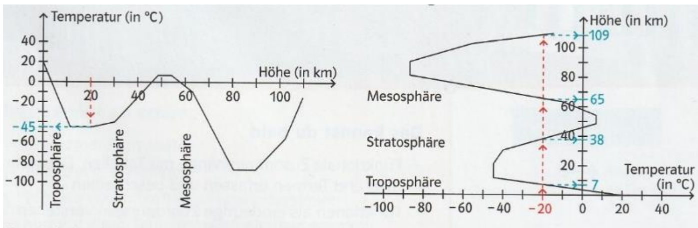
Den Graphen einer Funktion bezeichnet man mit G_f.

Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse: $SP_y(0|y_o)$

Schnittpunkt von G_f mit der x-Achse: $SP_x(x_0|0)$

Die Nullstelle einer Funktion ist die x-Koordinate des Schnittpunktes von G_f mit der x-Achse.

Aufgaben und Beispiele



Quelle: Lambacher Schweizer 8

Das ist eine eindeutige Zuordnung, also der Graph einer Funktion.

Das ist KEINE eindeutige Zuordnung, also KEIN Graph einer Funktion.

Ein Graph ist nur dann ein Funktionsgraph, wenn jede mögliche Parallele zur y-Achse den Graphen in höchstens einem Punkt schneidet.

Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 4$

Definitionsmenge $D_f = \mathbb{Q}$

Wertetabelle:

x	– 2	– 1	- 0,5	0	0,5	1	3
y = f(x)	0	3	3,75	4	3,75	3	– 5

$SP_y(0|4)$

$SP_{x_1}(-2|0)$

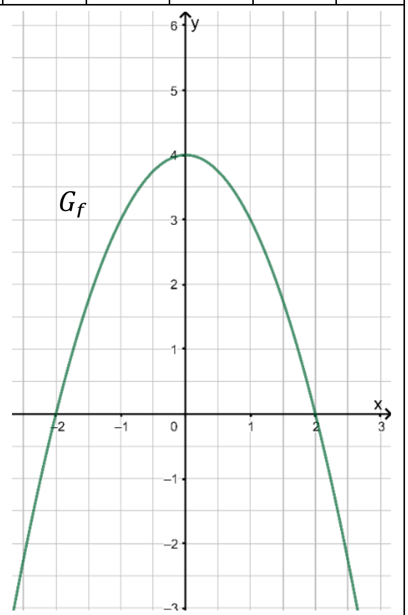
$SP_{x_2}(2|0)$

Nullstellen:

$x_1 = -2$; $x_2 = 2$

Wertemenge

$W_f =]-\infty; 4]$



Lineare Funktionen

Eine Funktion der Form $f: x \mapsto m \cdot x + t$ mit $D_f = \mathbb{Q}$ und $m, t \in \mathbb{Q}$ heißt lineare Funktion. Der Graph einer linearen Funktion ist immer eine Gerade.

In der Geradengleichung $y = m \cdot x + t$ gibt *m* die Steigung der Geraden und *t* den y-Achsenabschnitt an.

Für die Steigung gilt: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

- Je größer $|m|$ ist, desto steiler ist die Gerade.
- $m > 0$: die Gerade steigt
- $m < 0$: die Gerade fällt
- $m = 0$: die Gerade verläuft parallel zur x-Achse

Besondere Geraden

- Geraden mit gleicher Steigung sind parallel.
- Geraden, bei denen *t* = 0 ist, sind Ursprungsgeraden.
- Zwei Geraden für die gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$ stehen senkrecht aufeinander.

Ein Punkt $P(x_0|y_0)$ liegt
auf einer Geraden, falls $f(x_0) = y_0$.
oberhalb einer Geraden, falls $f(x_0) < y_0$.
unterhalb einer Geraden, falls $f(x_0) > y_0$.

Zeichnen von Geraden

1. Möglichkeit: Zeichne die Gerade mithilfe des y-Achsenabschnitts und eines Steigungsdreiecks.

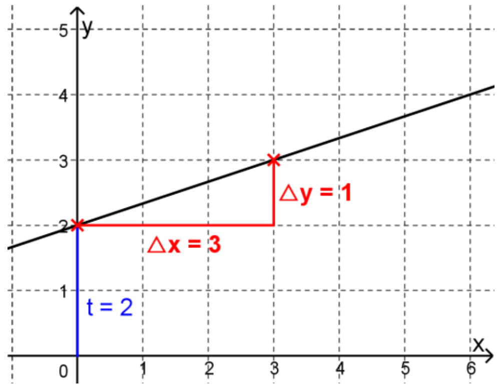
2. Möglichkeit: Finde zwei Punkte, welche die Geradengleichung erfüllen und zeichne die Gerade durch diese beiden Punkte.

Aufstellen einer Geradengleichung

- Steigung *m* und ein Punkt gegeben

Bestimme die Gleichung der Geraden p, die parallel zu G_f (siehe A1) und durch den Punkt G(3|2) verläuft. (Lösung siehe rechts)

Wir betrachten den Graphen G_f von $f: x \mapsto \frac{1}{3} \cdot x + 2$



A1: Überprüfe durch eine Rechnung, ob der Punkt P (2|3) auf dem Graphen von $f: x \mapsto \frac{1}{3} \cdot x + 2$ liegt.

L: $f(2) = 2\frac{2}{3} < 3 \Rightarrow$ Der Punkt P liegt oberhalb des Graphen von f (vgl. Abbildung oben).

Zeichne die Gerade g zur Gleichung $y = \frac{1}{3}x + 2$ (s.o.).
1. Möglichkeit:
t = 2 → $S_y(0|2)$ einzeichnen
Von S_y aus geht man nun 3 nach rechts und 1 nach oben und erhält so einen zweiten Punkt auf der Geraden.

2. Möglichkeit:
Setze zwei verschiedene x-Werte in die Geradengleichung ein:
z.B. x = 0: $y = \frac{1}{3} \cdot 0 + 2 = 2$ → A(0|2) liegt auf g
x = 3: $y = \frac{1}{3} \cdot 3 + 2 = 3$ → B(3|3) liegt auf g

$m = \frac{1}{3}$ (gleiche Steigung wie f in A1) $\Rightarrow y = \frac{1}{3}x + t$ (*)
⇨ G in (*): $2 = \frac{1}{3} \cdot 3 + t$ → t = 1
⇨ $p: y = \frac{1}{3}x + 1$

- Zwei Punkte gegeben

Erstelle die Gleichung der Geraden h, die durch die Punkte A(4|1) und B(-3|2) verläuft.
(Lösung siehe rechts)

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-1}{-3-4} = -\frac{1}{7}$

⇨ $y = -\frac{1}{7}x + t$ (*)

⇨ A in (*): $1 = -\frac{1}{7} \cdot 4 + t$ => t = $1\frac{4}{7}$

⇨ $h: y = -\frac{1}{7}x + 1\frac{4}{7}$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

- Schnittpunkt mit der y-Achse: $SP_y(0|y_o)$

Man setzt x = 0 in die Funktionsgleichung ein.

- Schnittpunkt mit der x-Achse: $SP_x(x_0|0)$

Man setzt y = 0 und löst die Gleichung nach x auf.

Berechne die Schnittpunkte des Graphen von $f: y = 3x - 1$ mit den Koordinatenachsen.

$SP_y: y = 3 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow SP_y(0|-1)$

$SP_x: y = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow SP_x(\frac{1}{3}|0)$

Schnittpunkt zweier Geraden

1. Rechnerische Lösung: Funktionsterme gleichsetzen, nach x auflösen und anschließend x in eine der beiden Geradengleichungen einsetzen um y zu bestimmen

2. Graphische Lösung: Beide Geraden in ein gemeinsames Koordinatensystem einzeichnen und Schnittpunkt ablesen

Ermittle den Schnittpunkt von $p: y = -x + 2$ und $q: y = 3x - 8$.

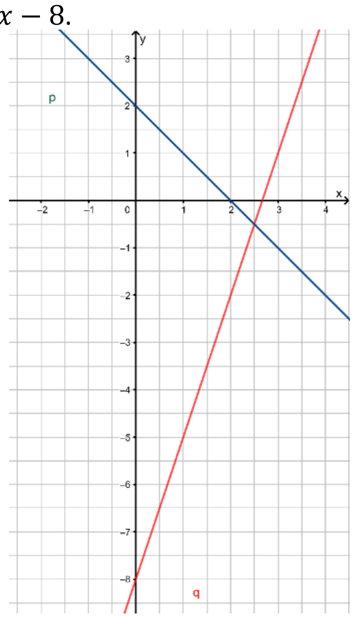
1. $-x + 2 = 3x - 8$

$\Rightarrow x = 2{,}5$

$in\ p: y = -2{,}5 + 2 = -0{,}5$

$\Rightarrow$ S(2,5/–0,5)

2. siehe rechts



Lineare Ungleichungen

Besteht eine Ungleichung aus zwei linearen Termen, so spricht man von einer linearen Ungleichung.

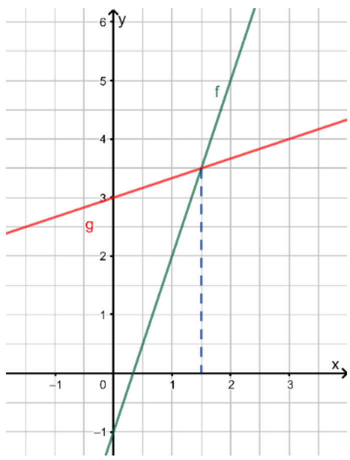
Graphische Lösung:

Bestimme zunächst den Schnittpunkt S(x_S|y_S) der beiden Funktionsgraphen, die zu den beiden linearen Funktionen gehören. Die Lösungsmenge umfasst dann – je nach Ungleichheitszeichen – entweder alle Zahlen, die kleiner oder größer sind als x_S.

$\frac{1}{3}x + 3 > 3x - 1$

Für die graphische Lösung musst du herausfinden, in welchem Bereich, der rote Graph oberhalb des grünen Graphen liegt.

Lösungsmenge:
$L =]-\infty;\ 1{,}5[$



<u>Rechnerische Lösung:</u>

Löse die lineare Ungleichung mithilfe von Äquivalenzumformungen, die du vom Lösen linearer Gleichungen kennst.
Beachte: Werden beide Seiten der Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch diese dividiert, so musst du das Ungleichheitszeichen umdrehen.

$$\frac{1}{3}x + 3 > 3x - 1 \qquad | -3x - 3$$
$$\frac{1}{3}x - 3x > -1 - 3$$
$$-\frac{8}{3}x > -4 \qquad | : \left(-\frac{8}{3}\right) \text{ oder } \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)$$
$$x < -4 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)$$
$$x < \frac{3}{2}$$

$L =]-\infty; 1{,}5[\quad = \quad \{x \mid x < 1{,}5\}$
(Intervallschreibweise) (Mengenschreibweise)

Direkt proportionale Funktionen

Zwei Größen x und y heißen zueinander direkt proportional, wenn gilt:

- dem n-fachen Wert von x entspricht dem n-fachen Wert von y. (Wenn x sich verdoppelt/halbiert, verdoppelt/halbiert sich auch y....)
- der Quotient $m = \frac{y}{x}$ hat stets den gleichen Wert (Quotientengleichheit).
  m heißt dann Proportionalitätsfaktor.
- alle Punkte (x|y) liegen auf einer Ursprungsgeraden mit der Gleichung $y = m \cdot x, \ (m \neq 0)$.

Theodor kauft auf dem Markt 3kg Karotten und bezahlt dafür 3,60€. Ermittle auf unterschiedliche Arten, wie viel er für 2kg bezahlen müsste.

a) Dreisatz:

	Masse in kg	Preis in €	
	3	3,60	
:3	1	1,20	:3
·2	2	2,40	·2

b) Quotientengleichheit: $m = \frac{3{,}60€}{3kg} = 1{,}20\frac{€}{kg}$

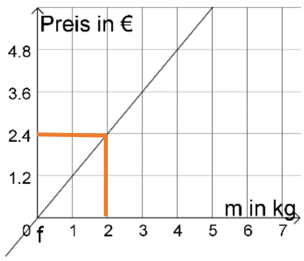
$y = 1{,}20\frac{€}{kg} \cdot 2kg = 2{,}40€$

Oder: $\frac{y}{2kg} = \frac{3{,}60€}{3kg} \Leftrightarrow y = \frac{3{,}60€}{3kg} \cdot 2kg \Leftrightarrow y = 2{,}40€$

c) Graph:

$y = 1{,}20\frac{€}{kg} \cdot x$,

wobei x die Masse in kg und y den Preis in € beschreiben.



Gebrochen-rationale Funktionen

Bruchterme sind Terme mit einer Variablen im Nenner.

Gebrochen-rationale Funktionen sind Funktionen mit einem Bruchterm als Funktionsterm.

Werte, für die der Nenner des Funktionsterms Null wird, gehören nicht zur Definitionsmenge, man nennt sie Definitionslücken.

Eine Gerade, der sich der Graph einer Funktion beliebig genau annähert, nennt man Asymptote des Funktionsgraphen.

Senkrechte Asymptoten von gebrochen-rationalen Funktionen sind senkrechte Geraden an den Definitionslücken.

Der waagrechten Asymptote nähert sich der Graph der gebrochen-rationalen Funktion für x - Werte mit großem Betrag an.

Der Graph der Funktion $f: x \longmapsto \frac{a}{x+b} + c$ geht aus dem Graphen von $x \mapsto \frac{1}{x}$ in dieser Reihenfolge hervor:

Verschiebung um b in x-Richtung
($b > 0$ nach links; $b < 0$ nach rechts)

Streckung des Graphen mit dem Faktor $|a|$ in y-Richtung; Spiegelung an der x-Achse, falls $a < 0$

Verschiebung um c in y-Richtung
($c > 0$ nach oben; $c < 0$ nach unten)

Die Asymptoten sind $x = -b$ und $y = c$.

$\frac{3}{x}$	$\frac{4}{2x-3} + 1$	$\frac{5+x}{x^2-1}$
$f: x \mapsto \frac{3}{x}$	$h: x \mapsto \frac{4}{2x-3} + 1$	$g(x) = \frac{5+x}{x^2-1}$
$D_f = \mathbb{Q}\backslash\{0\}$	$D_h = \mathbb{Q}\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\}$	$D_g = \mathbb{Q}\backslash\{-1; 1\}$

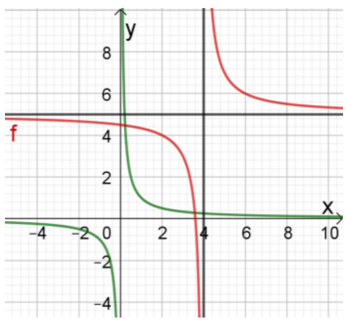
Berechnung der Definitionslücke für die Funktion $h(x)$:
$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$f(x) = \frac{2}{x-3}$
Definitionslücke: $x = 3$
Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{Q}\backslash\{3\}$
Senkrechte Asymptote: Gerade $x = 3$
Waagrechte Asymptote: Gerade $y = 0$, da der Funktionswert sich für x-Werte mit großem Betrag dem Wert 0 annähert:

x	-10000	-1000	1000	10000
f(x)	-0,0002	-0,002	0,002	0,0002

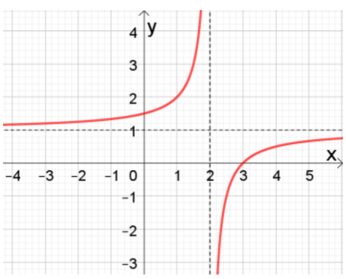
$f(x) = \frac{2}{x-4} + 5$

$\frac{1}{x}$ wird um 4 nach rechts verschoben, mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt und um 5 nach oben verschoben.



Die Asymptoten sind $x = 4$ und $y = 5$.

A1: Gib den passenden Funktionsterm zum folgenden Graphen und die Gleichungen der Asymptoten an. (Tipp: Der Parameter a muss durch Einsetzen eines passenden Punktes z.B. $P(3|0)$ berechnet werden)



L:
b und c ablesen:
$f(x) = \frac{a}{x-2} + 1$
$P(3|0)$ einsetzen:
$\Rightarrow f(3) = \frac{a}{3-2} + 1 = 0$
$\Rightarrow \frac{1}{a} + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$
$f(x) = \frac{-1}{x-2} + 1$
$x = 2$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen) ermittelt man durch Lösen der Gleichung $f(x) = 0$.

Schnittpunkte mit der y-Achse ermittelt man, durch Berechnen des Wertes von $f(0)$.

A2: Berechne für $f(x) = \frac{2}{x-1} - 1$ die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

L:

$$0 = \frac{2}{x-1} - 1 \Rightarrow 1 = \frac{2}{x-1}$$
$$1 \cdot (x-1) = 2 \Rightarrow x - 1 = 2$$
$$x = 3 \Rightarrow P(3|0)$$
$$f(0) = \frac{2}{0-1} - 1 = -2 - 1 = -3$$
$$\Rightarrow Q(0|-3)$$

Indirekte Proportionalität

Gehört bei einer Zuordnung zum Doppelten, zum Halben, ..., zum r - Fachen der einen Größe die Hälfte, das Doppelte, ..., das $\frac{1}{r}$ - Fache der anderen Größe, so heißt die Zuordnung indirekt proportionale Zuordnung.

Die zugehörige Zuordnungsvorschrift ist:

$x \mapsto \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$.

Die Wertepaare $\left(x|\frac{a}{x}\right)$ sind produktgleich.

$x \cdot \frac{a}{x} = a$

Für $a = 3$

·2 ·2 ·2

x	1	2	4	8
$f(x) = \frac{3}{x}$	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$

:2 :2 :2

Produktgleichheit:

$$1 \cdot 3 = 2 \cdot \frac{3}{2} = 4 \cdot \frac{3}{4} = 8 \cdot \frac{3}{8} = 3$$

Bruchterme und Bruchgleichungen

Kürzen und Erweitern

Zähler und Nenner des Bruchterms werden mit/durch den gleichen Term multipliziert bzw. dividiert.

mit x^2 kürzen

$$\frac{5x^2}{4x^2 - x^3} = \frac{x^2 \cdot 5}{x^2 \cdot (4-x)} = \frac{5}{4-x}$$

mit x^2 erweitern

A1: Kürze vollständig. $\frac{10x^3-5x^2}{2x-10}$

L:

$$\frac{10x^3 - 5x^2}{2x - 10} = \frac{5x^2(2x-1)}{10 \cdot (2x-1)} = \frac{5x^2}{10} = \frac{x^2}{2}$$

A2: Berechne. $\frac{x^2}{4x^3} - \frac{8}{x-1} + \frac{2,5-x^2}{x^2-x}$

L:

$$\frac{x^2}{4x^3} - \frac{8}{x-1} + \frac{2,5-x^2}{x^2-x}$$
$$= \frac{x^2}{4x^3} - \frac{8}{x-1} + \frac{2,5-x^2}{x^2-x} = \frac{1}{4x} - \frac{8}{x-1} + \frac{2,5-x^2}{x(x-1)}$$
$$= \frac{1 \cdot (x-1)}{4x \cdot (x-1)} - \frac{8 \cdot 4x}{4x \cdot (x-1)} + \frac{4 \cdot (2,5-x^2)}{4x \cdot (x-1)}$$
$$= \frac{x - 1 - 32x + 10 - 4x^2}{4 \times (x-1)} = \frac{-4x^2 - 31x + 9}{4x \cdot (x-1)}$$

Addieren/Subtrahieren von Bruchtermen

1. Bruchterme auf gleichen Nenner bringen
2. Zähler addieren/subtrahieren
3. Nenner beibehalten

Multiplizieren/Dividieren von Bruchtermen

Bruchterme werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Bruchterme werden dividiert, indem man den Dividenden mit dem Kehrbruch des Divisors multipliziert.

Rechengesetze für Potenzen

$$\boldsymbol{a, b \neq 0 \;;\; p, q \in \mathbb{Z}}$$

1. **Gleiche Basis**

$$\boldsymbol{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$$
$$\boldsymbol{\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}}$$

2. **Gleicher Exponent**

$$\boldsymbol{a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p}$$
$$\boldsymbol{a^p : b^p = \left(\frac{a}{b}\right)^p}$$

3. **Potenzen von Potenzen**

$$\boldsymbol{(a^p)^q = a^{p \cdot q} = (a^q)^p}$$

4. **Negative Exponenten**

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

A3: Vereinfache.

$$\frac{5x}{14(x+y)} \cdot \frac{7(x+y)}{10y}$$

L: $\frac{5x}{14(x+y)} \cdot \frac{7(x+y)}{10y} = \frac{5 \cdot 7 \cdot x \cdot (x+y)}{10 \cdot 14 \cdot y \cdot (x+y)} = \frac{1 \cdot 1 \cdot x}{2 \cdot 2 \cdot y} = \frac{x}{4y}$

A4: Vereinfache.

$$\frac{a^2 - b^2}{5a} : \frac{a-b}{a+b}$$

L:
$$\frac{a^2-b^2}{5a} : \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a+b)\cdot(a-b)}{5a} \cdot \frac{a+b}{a-b}$$
$$= \frac{(a+b)\cdot(a-b)\cdot(a+b)}{5a\cdot(a-b)} = \frac{(a+b)^2}{5a}$$

A5: Fasse zusammen. $a^{-7} \cdot a^3$

L: $a^{-7} \cdot a^3 = a^{-7+3} = a^{-4} = \frac{1}{a^4}$

A6: Fasse zusammen. $y^5 : (2y)^5$

L: $y^5 : (2y)^5 = \left(\frac{y}{2y}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

A7: Fasse zusammen. $(a^{-4})^2$

L: $(a^{-4})^2 = a^{(-4)\cdot 2} = a^{-8} = \frac{1}{a^8}$

A8: Vereinfache den Term. (Schreibe ohne negative Exponenten.) $3a^{-6}b^4 - \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^{-2}$

L: $3a^{-6}b^4 - \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^{-2} = 3 \cdot \frac{1}{a^6} \cdot b^4 - \left(\frac{b^2}{a^3}\right)^2$

$= 3\frac{b^4}{a^6} - \frac{b^4}{a^6} = 3 \cdot \frac{b^4}{a^3} - 1 \cdot \frac{b^4}{a^3} = 2\frac{b^4}{a^6}$

Oder: $3a^{-6}b^4 - \left(\frac{a^3}{b^2}\right)^{-2} = b^4(3a^{-6} - a^{-6})$

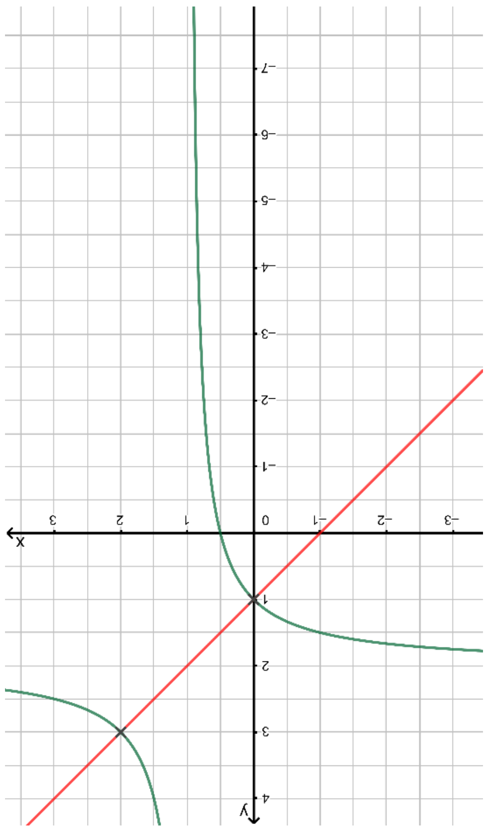
$= b^4 \cdot 2a^{-6} = 2\frac{b^4}{a^6}$

Bruchgleichungen

Definitionsmenge bestimmen - Nicht vergessen!
(Nenner $\neq 0$)

- Lösungsverfahren rechnerisch
  1. Vereinfachen der linken und rechten Seite
  2. Multiplikation beider Seiten mit dem Hauptnenner
  3. Lösen der Gleichung mit Äquivalenzumformungen
  4. Kontrolle: Ist die Lösung in der Definitionsmenge?

- Lösungsverfahren graphisch
  1. Zeichnen der linken und rechten Seite als Funktionsgraphen
  2. Ablesen der x-Koordinate des Schnittpunktes
  3. Kontrolle: Ist die Lösung in der Definitionsmenge?



A9: Löse rechnerisch.

$$\frac{3}{x+1} = \frac{5}{x+2}$$

L:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{x+2}{5}$$

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; -2\}$$

$$HN = (x+1)\cdot(x+2)$$

$$\frac{x+1}{3}\cdot(x+1)\cdot(x+2) = \frac{x+2}{5}\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$

$$3\cdot(x+2) = 5\cdot(x+1)$$

$$3x + 6 = 5x + 1 \quad |-3x;\ -1$$

$$5 = 2x$$

$$x = 2{,}5$$

$$2{,}5 \in D$$

$$L = \{2{,}5\}$$

A10: Löse graphisch.

$$\frac{1}{x-1} + 2 = x + 1$$

L:

$$D = \mathbb{Q}\setminus\{1\}$$

Schnittpunkt der Graphen G_f und G_g mit $f: x \mapsto \frac{1}{x-1} + 2$ und $g: x \mapsto x + 1$

Siehe nebenstehendes Bild

$S_1(0|1)$ und $S_2(2|3)$

$x - Werte\ ergeben:\ L = \{0; 2\}$

Laplace-Experimente

Ein Experiment, dessen Ausgang nicht vorhersehbar ist, nennt man Zufallsexperiment.
Den Ausgang des Experiments nennt man Ergebnis.
Alle möglichen Ergebnisse zusammen bilden die Ergebnismenge Ω.

Ein Ereignis E ist eine Teilmenge der Ergebnismenge Ω.
Man sagt: „Das Ereignis E ist eingetreten“, wenn ein Ergebnis aus E eintritt.

Alle Ergebnisse, die nicht zum Ereignis E gehören, bilden das Gegenereignis $\overline{\mathrm{E}}$.

Das Ereignis $E = \{\quad\}$ „leere Menge“ heißt unmögliches Ereignis.

Das Ereignis E = Ω heißt sicheres Ereignis.

Führt man ein Zufallsexperiment n-mal durch, unterscheidet man die absolute Häufigkeit H(E) und die relative Häufigkeit h(E) eines Ereignisses. Es gilt:

$$\mathrm{h(E)} = \frac{\mathrm{H(E)}}{\mathrm{n}}$$

Empirisches Gesetz der großen Zahlen:
Die relative Häufigkeit eines Ereignisses E stabilisiert sich mit zunehmender Versuchsanzahl n um einen bestimmten Wert.
Dieser Wert ist ein guter Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit P(E) für das Eintreten des Ereignisses E.

Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, heißen Laplace-Experimente.

Jedem Ereignis E wird eine Wahrscheinlichkeit P(E) zwischen 0 und 1 zugeordnet.

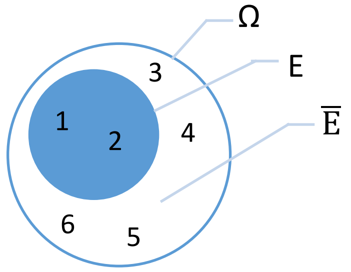
Laplace-Wahrscheinlichkeit: Für Laplace-Experimente gilt:

$$\mathrm{P(E)} = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses: $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{E}}) = 1 - \mathrm{P(E)}$.

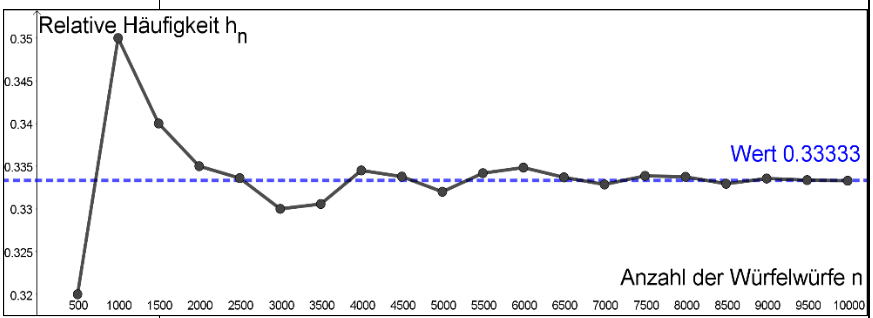
Zufallsexperiment:
Einmaliges Werfen eines Würfels
Ergebnismenge Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Ereignis E: „höchstens Augenzahl 2“
E = {1, 2}
Gegenereignis $\overline{\mathrm{E}}$: „mindestens Augenzahl 3“
$\overline{\mathrm{E}}$ = {3, 4, 5, 6}



Ein Würfel wird 10 000-mal geworfen.
Das Ereignis E: „höchstens Augenzahl 2“ tritt 3335-mal auf. Also H(E) = 3335

$$\mathrm{h(E)} = \frac{3\,335}{10\,000} \approx 0{,}33$$



Da jede Augenzahl beim Würfeln gleich wahrscheinlich ist, handelt es sich um ein Laplace-Experiment.

$$\mathrm{P}(\text{"Augenzahl 6 wird gewürfelt"}) = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}\text{: "höchstens Augenzahl 2"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

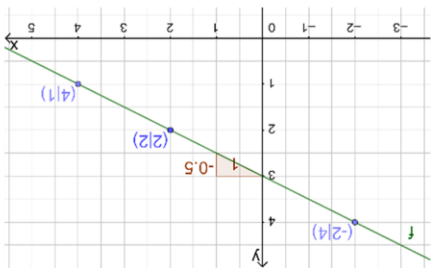
$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{E}}\text{: "mindestens Augenzahl 3"}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Lineare Gleichungssysteme

Gleichungen der Form $ax + by = c$ mit den Parametern a, b, c (a, b $\neq$ 0) heißen lineare Gleichungen mit zwei Variablen x und y.

Es gilt:

1) Jede Lösung ist ein Zahlenpaar $(x|y)$.
2) Die Lösungsmenge enthält unendlich viele Lösungspaare: $L = \{ (x|y) \mid ax + by = c \}$
3) Die grafische Darstellung der Lösungsmenge ist eine Gerade. Durch Auflösen nach y erhält man die Geradengleichung einer linearen Funktion: $ax + by = c \Leftrightarrow \boldsymbol{y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}}$



Zwei lineare Gleichungen mit denselben zwei Variablen bilden ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen.

Lösungen solcher Gleichungssysteme sind Zahlenpaare $(x|y)$, die beim Einsetzen **beide** Gleichungen erfüllen.

Grafische Lösung (Gleichsetzungsverfahren)

Auflösen beider Gleichungen nach y liefert zwei Geradengleichungen, die in ein Koordinatensystem gezeichnet werden.

Ein lineares Gleichungssystem kann

- genau eine Lösung haben (= Schnittpunkt der beiden Geraden)
- keine Lösung haben (zwei parallele Geraden schneiden sich nicht)
- unendlich viele Lösungen haben (zwei identische Geraden schneiden sich unendlich oft)

A1: Stelle zur folgenden Aussage eine Gleichung mit zwei Unbekannten auf: *„Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 20cm."*

L:
Sei x die Länge der Schenkel in cm.
Sei y die Länge der Basis in cm.
Gleichung: $2x + y = 20$

A2: Bestimme zwei ganzzahlige Lösungen der Gleichung $3x + 6y = 18$ und beschreibe zwei Möglichkeiten, die zu der Gleichung gehörende Gerade zu zeichnen. Zeichne nun die Gerade und lies eine weitere Lösung ab.

L: *z.B.* $(-2|4)$ *oder* $(2|2)$

Möglichkeit 1: Man trägt die zwei gefundenen Lösungspaare als Punkte in ein Koordinatensystem ein und verbindet sie zu einer Geraden.

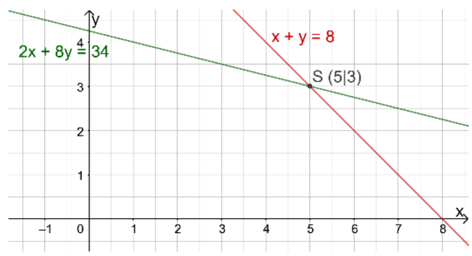
Möglichkeit 2: Aus der nach y aufgelöste Form der Gleichung entnimmt man die Steigung $m = -0{,}5 = -\frac{1}{2}$ *und den y-Achsenabschnitt* $t = 3$ *und zeichnet die Gerade. (siehe Abbildung links)*

$3x + 6y = 18 \quad | -3x$
$6y = -3x + 18 \quad | :6$
$y = -0{,}5x + 3$

Eine weitere Lösung ist z.B. (4|1). (vgl. Abb. links)

(I) $2x + 8y = 34$
(II) $x + y = 8$

(I) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{17}{4}$
(II) $y = -x + 8$



Der Schnittpunkt S der beiden Geraden, hier das Zahlenpaar $(5|3)$, ist die Lösung beider Gleichungen.

A3: Stelle ein lineares Gleichungssystem auf und überprüfe, ob $(35|11)$ eine Lösung ist:
„Welche Zahlen ergeben addiert 46 und subtrahiert 24?“

L:
Lineares Gleichungssystem aufstellen:

(I) $x + y = 46$
(II) $x - y = 24$

Überprüfen des Lösungsvorschlags $(35|11)$:

(I) $35 + 11 = 46$ ✓
(II) $35 - 11 = 24$ ✓

=> $(35|11)$ *ist Lösung des Gleichungssystems.*

Lösen mit dem Einsetzungsverfahren

Durch dieses rechnerische Lösungsverfahren wird ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen auf nur eine Gleichung mit einer Variablen zurückgeführt, die man dann mithilfe von Äquivalenzumformungen lösen kann.

Vorgehensweise:

1. UMFORMEN: Auflösen einer Gleichung nach einer Variablen
2. EINSETZEN: Einsetzen des ermittelten Terms für die eine Variable in die andere Gleichung und Berechnung des Werts der anderen Variablen
3. ERGEBNIS EINSETZEN: Einsetzen des berechneten Werts für x in die nach y aufgelöste Gleichung

(I) $2x + 4y = 8$
(II) $x - y = 1$

1. (II) nach y: $y = x - 1$

2. (II) in (I): $2x + 4(x - 1) = 8$

$$2x + 4x - 4 = 8 \quad | +4$$
$$6x = 12 \quad | :6$$
$$x = 2$$

3. $x = 2$ in $y = x - 1$

$$y = 2 - 1 = 1$$

Lösung: $(2|1)$

Lösen mit dem Additionsverfahren

Die Idee ist es, beide Gleichungen zu einer Gleichung zusammenzufassen, wobei dabei eine Variable wegfallen soll.

Vorgehensweise beim Additionsverfahren

1. **Umformen:** Multipliziere eine der beiden Gleichungen so mit einer geeigneten Zahl, dass eine der Variablen die Gegenzahl zur Variablen in der anderen Gleichung ergibt.

2. **Gleichungen addieren:** Schreibe nun die beiden Gleichungen in eine neue Gleichung, indem du jeweils beide linken Seiten und beide rechten Seiten miteinander addierst (Vorzeichen beachten!).
Wenn du die Gleichung jetzt vereinfachst, sollte eine der Variablen wegfallen, sodass du die Gleichung lösen kannst.

3. **Ergebnis einsetzen:** Zum Schluss setzt du deine Lösung für die erste Variable in eine der beiden Gleichungen vom Anfang ein und löst diese nach der anderen Variablen auf.

(I) $2y + 4 = 6x$
(II) $6y - 3x = -5$

1. Multiplikation von (I) mit -3:
(I) $\mathbf{-6y - 12 = -18x}$
(II) $\mathbf{6y - 3x = -5}$

2. Addition von (I) und (II):
$\mathbf{-6y - 12} + \mathbf{6y - 3x} = \mathbf{-18x} + (\mathbf{-5})$

$$-12 - 3x = -18x - 5 \quad | +18x; +12$$
$$15x = 7 \quad |:15$$
$$x = \frac{7}{15}$$

3. Einsetzen von $x = \frac{7}{15}$ in (II):
$$6y - 3 \cdot \frac{7}{15} = -5$$
$$6y - \frac{7}{5} = -5 \quad | + \frac{7}{5}$$
$$6y = -\frac{18}{5} \quad |:6$$
$$y = -\frac{3}{5}$$

$$L = \left\{\left(\frac{7}{15}\middle|-\frac{3}{5}\right)\right\}$$

Lineare Gleichungssysteme in Anwendungssituationen

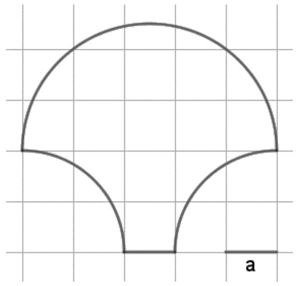
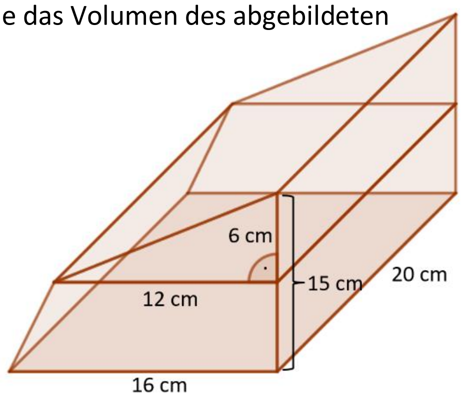
Das Vorgehen beim Lösen von Anwendungsaufgaben mithilfe eines Gleichungssystems ist gleich wie bei linearen Gleichungen (Grundwissen 7. Klasse):

1. **Variablen einführen**
2. **Gleichungen aufstellen**
3. **Gleichungssystem lösen**
4. **Ergebnis überprüfen** und **Antwort formulieren.**

Sina und Carl feiern Geburtstag. Zusammen werden sie 83 Jahre alt. Wäre Carl 10 Jahre eher geboren, wäre er heute doppelt so alt wie Sina.
Wie alt werden die beiden?

1. Alter von Carl: **x**
   Alter von Sina: **y**
2. (I) $2x + y = 83$
   (II) $x + 10 = 2y$
3. Gleichung (I) nach x auflösen und in (II) einsetzen ergibt $y = 31$ und $x = 52$.
4. $52 + 31 = 83$ ✓
   $52 + 10 = 2 \cdot 31$ ✓

Antwort: Carl wird 52 und Sina wird 31 Jahre alt.

Umfang und Flächeninhalt des Kreises Ist r der Radius bzw. d der Durchmesser eines **Kreises**, so gilt: Umfang $U = 2\pi \cdot r$ bzw. $U = \pi \cdot d$. (Dabei ist $\pi \approx 3{,}14$ die Kreiszahl) Flächeninhalt $A = \pi \cdot r^2$.	Berechne den Umfang und den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Durchmesser $d = 3\,dm$ $U = \pi \cdot d = \pi \cdot 3\,dm \approx 9{,}42\,dm$ $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (3\,dm : 2)^2 \approx 7{,}07\,dm^2$ **A1**: Eine 12,4m lange Schnur wird auf dem Schulhof zu einem Kreis gelegt. Berechne den Radius des gelegten Kreises. **A2:** Gib eine Formel für den Flächeninhalt der abgebildeten Figur in Abhängigkeit von a an. Vereinfache den Term so weit wie möglich.  L: A1: $U = 2\pi \cdot r \Rightarrow r = \frac{U}{2\pi} = \frac{12{,}4\,m}{2\pi} \approx 1{,}97\,m$ A2: $A = \frac{1}{2}\pi \cdot (2{,}5a)^2 + \left[2a \cdot 5a - 2 \cdot \frac{1}{4}\pi\,(2a)^2\right]$ $= \frac{1}{2}\pi \cdot 6{,}25a^2 + \left[10a^2 - \frac{1}{2}\pi 4a^2\right]$ $= 10a^2 + 3{,}125a^2\pi - 2a^2\pi = 10a^2 + 1{,}125a^2\pi$
Oberflächeninhalt und Volumen des Prismas Ist G die Grundfläche, h die Höhe und M die Mantelfläche eines geraden **Prismas**, so gilt: Oberflächeninhalt $O = 2 \cdot G + M$ Volumen $V = G \cdot h$	**A:** Berechne das Volumen des abgebildeten Prismas.  L: $V = V_{Trapez-Prisma\ unten} + V_{Dreiecksprisma\ oben}$ $= \left[\frac{1}{2} \cdot (12\,cm + 16\,cm) \cdot (15\,cm - 6\,cm)\right] \cdot 20cm$ $+ \frac{1}{2} \cdot 12\,cm \cdot 6\,cm \cdot 20\,cm$ $= 2520\,cm^3 + 720\,cm^3 = 3240\,cm^3$

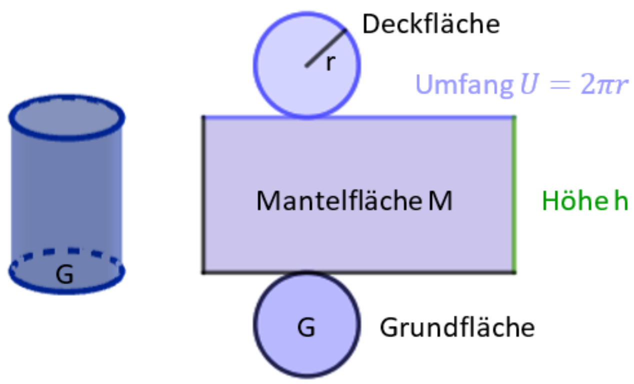
Oberflächeninhalt und Volumen des Zylinders:

Ist r der Grundkreisradius, h die Höhe und G der Grundflächeninhalt eines geraden **Zylinders**, so gilt:

Volumen V $= G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$

Inhalt der Mantelfläche M $= 2\pi r \cdot h$

Oberflächeninhalt O $= 2 \cdot G + M = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$



A1: Berechne das Volumen eines Zylinders mit dem Radius $r = 60\ cm$ und der Höhe $h = 2\ m$.

A2: Berechne die Höhe eines Zylinders mit dem Oberflächeninhalt $O \approx 351{,}86\ cm^2$ und der Höhe $r = 4\ cm$.

L:

A1: $V = \pi \cdot (0{,}6\ m)^2 \cdot 2\ m) \approx 2{,}26\ m^3$

A2: $O = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

$\Rightarrow h = \frac{O - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{351{,}86\ cm^2 - 2\pi \cdot (4\ cm)^2}{2\pi \cdot 4\ cm} \approx 10\ cm$