Grundwissen Mathematik Klasse 10 Lehrplan Plus

Grundwissen M 10

Lineares Wachstum

Ein Wachstum mit **konstantem Zuwachs d** in gleichen Zeitschritten heißt lineares Wachstum.

Es gilt: $\boldsymbol{B(t) = B(0) + d \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{N}$

$B(t)$: Bestand zum Zeitpunkt t
$B(0)$: Anfangsbestand
$d = B(t+1) - B(t)$
Für $d < 0$ spricht man von negativem Wachstum oder linearer Abnahme.

Exponentielles Wachstum

Ein Wachstum, bei dem sich der Bestand in gleichen Zeitschritten um einen bestimmten Faktor (**Wachstumsfaktor a**) ändert, heißt exponentielles Wachstum.

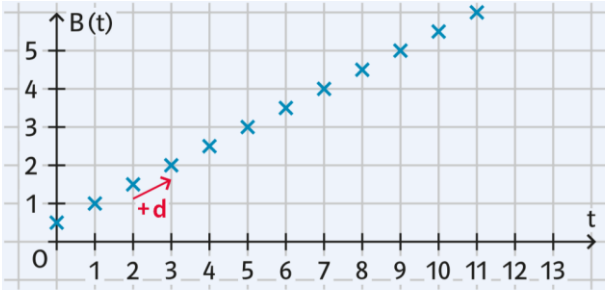
Es gilt: $\boldsymbol{B(t) = B(0) \cdot a^t}$ mit $t \in \mathbb{N}$

$B(t)$: Bestand zum Zeitpunkt t
$B(0)$: Anfangsbestand
$a = \frac{B(t+1)}{B(t)}$
Für $0 < a < 1$ spricht man von exponentieller Abnahme.

Aufgaben und Beispiele

$B(t) = 0{,}5 + \frac{1}{2} \cdot t$

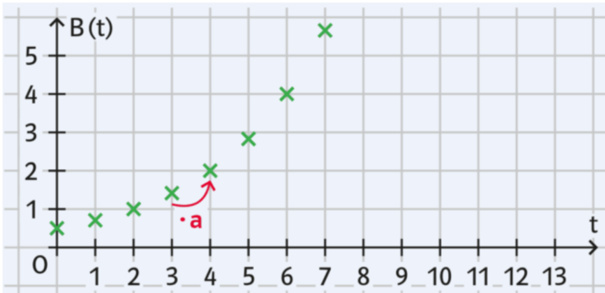
$\boldsymbol{t}$	0	1	2	3
$\boldsymbol{B(t)}$	0,5	1	1,5	2



Quelle: Lambacher Schweizer 10, Klett 2022, S. 7

$B(t) = 0{,}5 \cdot \sqrt{2}^{\,t}$

$\boldsymbol{t}$	0	1	2	3
$\boldsymbol{B(t)}$	0,5	$0{,}5 \cdot \sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$



Quelle: Lambacher Schweizer 10, Klett 2022, S. 7

A1: Untersuche, ob die Tabelle zu linearem oder exponentiellem Wachstum gehören kann und gib gegebenenfalls das Wachstumsgesetz an:

a)

t	0	1	2	3
$B(t)$	0,2	0,6	1,8	5,4

b)

t	0	1	2	3
$B(t)$	12,8	10,3	7,8	5,3

L: Man überprüft, ob der Quotient bzw. die Differenz aufeinanderfolgender Werte konstant ist.

a) $\frac{0,6}{0,2} = \frac{1,8}{0,6} = \frac{5,4}{1,8} = 3$ => $B(t) = 0,2 \cdot 3^t$

b) $10,3 - 12,8 = 7,8 - 10,3 = 5,3 - 7,8 = -2,5$

=> $B(t) = 12,8 - 2,5 \cdot t$

A2: Eine Population hat zu Beginn 500 Tiere.
Die Anzahl der Tiere nimmt jährlich um 10% zu.
Stelle die zugehörige Wachstumsfunktion auf und berechne, wie groß der Bestand nach 10 Jahren ist.

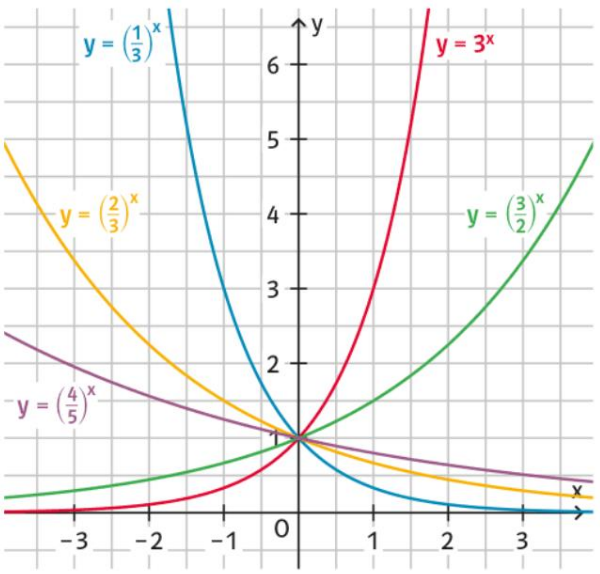
L: Der Bestand nimmt jährlich um den Faktor 100%+10%=1,1 zu. $B(t) = 500 \cdot 1,1^t$; $B(10) = 500 \cdot 1,1^{10} = 555$ (Tiere)

Exponentialfunktionen

Eine Funktion $f: x \mapsto a^x$ mit $x \in \mathbb{R}$, heißt **Exponentialfunktion**.
Man bezeichnet $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ als **Wachstumsfaktor**.

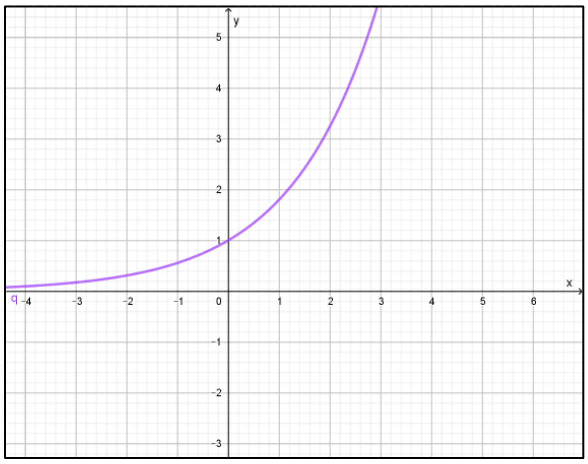
$a = \frac{f(x+1)}{f(x)}$ ($a = 1$: konstante Funktion)

Eigenschaften:
1. Monotonieverhalten: $a > 1$: Graph steigt
   $0 < a < 1$: Graph fällt
2. Graph läuft durch den Punkt $P(0|1)$
3. Wertemenge: $\mathbb{R}^+$
4. waagrechte Asymptote: $y = 0$ (x-Achse)
5. Graphen von $f(x) = a^x$ und $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$ sind zueinander achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse

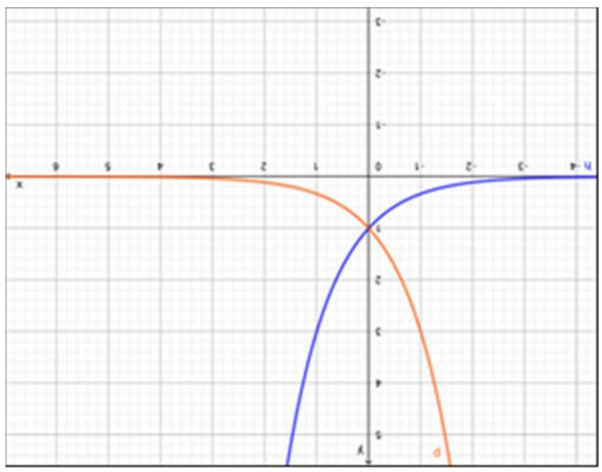


Quelle: Lambacher Schweizer 10, Klett 2022, S. 11

$f(x) = 1 \cdot 1,8^x$



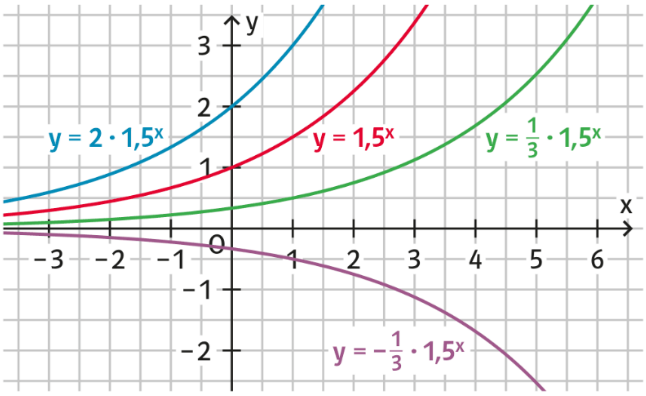
A3: Skizziere die Graphen zu $f(x) = 3^x$ und $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.



L:

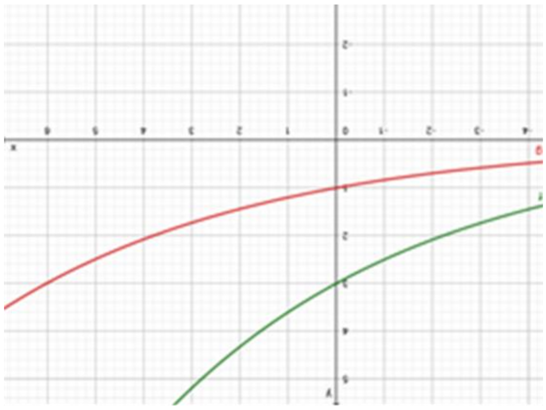
Streckung des Graphen der Exponentialfunktion

Den Übergang von der Funktion $f: x \longmapsto a^x$ zur Funktion $\boldsymbol{h: x \longmapsto b \cdot a^x}$ kann man als Streckung des Graphen von f in Richtung der y-Achse mit dem Faktor b auffassen. G_h verläuft daher durch $P(0|b)$.
Ist $b < 0$: Spiegelung an der x-Achse



Quelle: Lambacher Schweizer 10, Klett 2022, S. 12

A4: Skizziere G_f und G_h zu $f(x) = 1{,}2^x$ und $h(x) = 3 \cdot 1{,}2^x$.



L:

Exponentialgleichungen und Logarithmen

Lösung der Exponentialgleichung

$\boldsymbol{a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = log_a(b)} \qquad (a, b \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R})$

„Der Logarithmus von b zur Basis a ist derjenige Exponent, mit dem die Basis a potenziert werden muss, um b zu erhalten."

Abkürzung Zehnerlogarithmus: $\quad log_{10}(x) = lg(x)$

Für das Rechnen mit Logarithmen gilt:

$\boldsymbol{log_a(u^x) = x \cdot log_a(u)}$

$$2^3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = \log_2(8)$$

$$4^x = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x = \log_4\left(\frac{1}{16}\right) = \log_4(16^{-1}) = -2$$

$$25^x = \sqrt[3]{25} \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_{25}(\sqrt[3]{25}) = \frac{1}{3}$$

$$10^x = 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad x = \lg(0{,}01) = -2$$

$$\log_a(5^3) = 3 \cdot \log_a(5)$$

A5: Bestimme den Wert des Logarithmus <u>ohne TR</u>.

a) $\log_2(32)$ b) $\log_{10}(10\,000)$ c) $\log_7\left(\frac{1}{49}\right)$

L: a) $x = 5$, denn $2^5 = 32$;
b) $x = 4$, denn $10^4 = 10\,000$
c) $x = -2$, denn $7^{-2} = \frac{1}{49}$

A6: Ermittle die Lösung der Exponentialgleichung.

a) $2 \cdot 7^x - 6 = 14$ b) $3^{2x-1} = 30$ c) $6^x = 2^{3x+1}$

L: a) $2 \cdot 7^x - 6 = 14;\ 7^x = 10;\ x = \log_7(10) \approx 1{,}18$
b) $3^{2x-1} = 30;\ 2x - 1 = \log_3(30);\ x = \frac{1}{2}(\log_3(30) + 1) \approx 2{,}05$
c) $6^x = 2^{3x+1};\ 6^x = 2 \cdot 2^{3x};\ 6^x = 2 \cdot 8^x;\ \left(\frac{6}{8}\right)^x = 2$
$\Rightarrow x = \log_{0,75}(2) \approx -2{,}41$

Modellierung

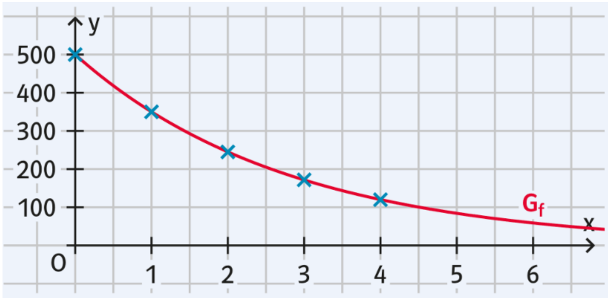
Die mathematische Beschreibung eines realen Vorgangs nennt man Modellierung.

Vorgehen bei der Modellierung eines Wachstumsprozesses mithilfe einer Funktion:

1. Berücksichtigung der gegebenen Informationen.
2. Wahl eines geeigneten Funktionstyps als Modell.
3. Bestimmen der Funktionsparameter mithilfe geeigneter Daten.
4. Überprüfen des Modells durch Vergleich mit realen Daten.

x	0	1	2	3	4	...	10
$f(x)$	500	348	246	171	120	...	?

Annahme: $f(x) = b \cdot a^x$, da Abnahme um gleichen Faktor.



Quelle: Lambacher Schweizer 10, Klett 2022, S. 36

$f(0) = 500 = b$; $\quad f(4) = 500 \cdot a^4 = 120$

$\Rightarrow \quad a = \sqrt[4]{0{,}24} \approx 0{,}7$ $\quad \Rightarrow f(x) = 500 \cdot 0{,}7^x$

$\Rightarrow f(10) = 500 \cdot 0{,}7^{10} \approx 14$

A7: Radioaktive Stoffe senden Strahlung aus und verwandeln sich dabei in andere Stoffe. Man sagt dazu, dass sie zerfallen. Die noch nicht zerfallene Stoffmenge nimmt dabei exponentiell mit der Zeit ab.
Ein bestimmter radioaktiver Stoff hat eine **Halbwertszeit** von 8 Tagen. Das bedeutet, dass nach jeweils 8 Tagen nur noch die Hälfte der Stoffmenge vorhanden ist.

a) Ermittle den Term einer Funktion, die den Zerfall des Stoffs in Abhängigkeit von der Zeit t in Tagen seit Beobachtungsbeginn beschreibt.
b) Gib an, welcher Anteil täglich zerfällt.
c) Bestimme, wie lange es nach diesem Modell dauert, bis der radioaktive Stoff zu 90% zerfallen ist.

L: a) Modellfunktion $f(t) = B_0 \cdot a^t$; B_0: Anfangsbestand
Aus der Halbwertszeit $t_H = 8$ folgt: $B_0 \cdot a^8 = 0{,}5 \cdot B_0$;
$a^8 = 0{,}5$; $a = \sqrt[8]{0{,}5} \approx 0{,}917$; Also gilt: $f(t) \approx B_0 \cdot 0{,}917^t$
b) Jeden Tag zerfallen also ca. 8,3% des radioaktiven Stoffs.
c) Ein Zerfall von 90% der Stoffmenge bedeutet, dass die Stoffmenge noch $0{,}1 \cdot B_0$ beträgt. $B_0 \cdot 0{,}917^t = 0{,}1 \cdot B_0$;
$0{,}917^t = 0{,}1$; $t = \log_{0{,}917}(0{,}1) \approx 26{,}6$
Nach etwa 26,6 Tagen sind etwa 90% zerfallen.

Zusammengesetzte Zufallsexperimente

Ein Zufallsexperiment, das aus mehreren Teilexperimenten besteht, nennt man zusammengesetztes oder mehrstufiges Zufallsexperiment.
Jedes Ergebnis eines mehrstufigen Zufallsexperiments stellt genau einen Pfad im Baumdiagramm dar.

Der Summenwert der Wahrscheinlichkeiten, die von einem Knotenpunkt ausgehen, ist immer 1.

Beim Ziehen ohne Zurücklegen ändern sich die Wahrscheinlichkeiten, im Vergleich zum Ziehen mit Zurücklegen, von Stufe zu Stufe.

Produkte von Wahrscheinlichkeiten: 1. Pfadregel

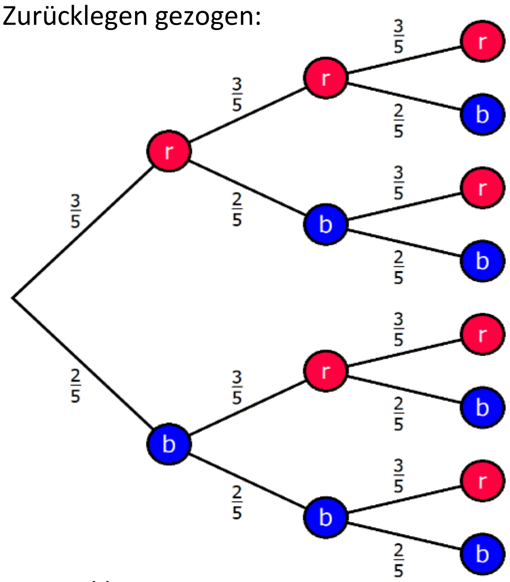
Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die **Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses**, indem man die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm multipliziert.

Summe von Wahrscheinlichkeiten: 2. Pfadregel

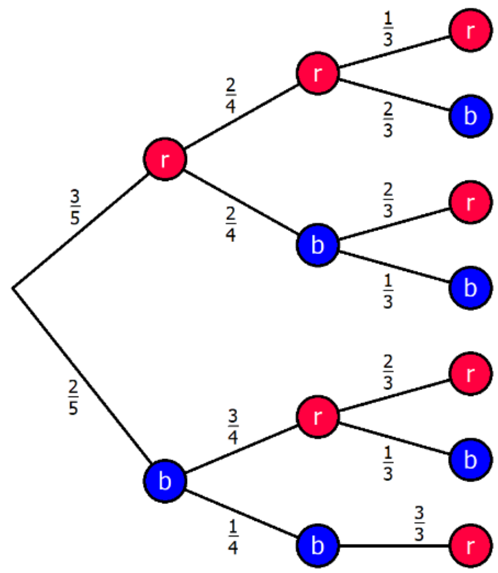
Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die **Wahrscheinlichkeiten eines Ereignisses**, indem man die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse addiert, die zu diesem Ereignis gehören
(Summe der Pfadwahrscheinlichkeiten).

In einer Urne befinden sich drei rote und zwei blaue Kugeln. Nacheinander werden drei Kugeln

a) mit Zurücklegen gezogen:



b) ohne Zurücklegen gezogen:



Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass beim Ziehen mit Zurücklegen

a) drei rote Kugeln gezogen werden.

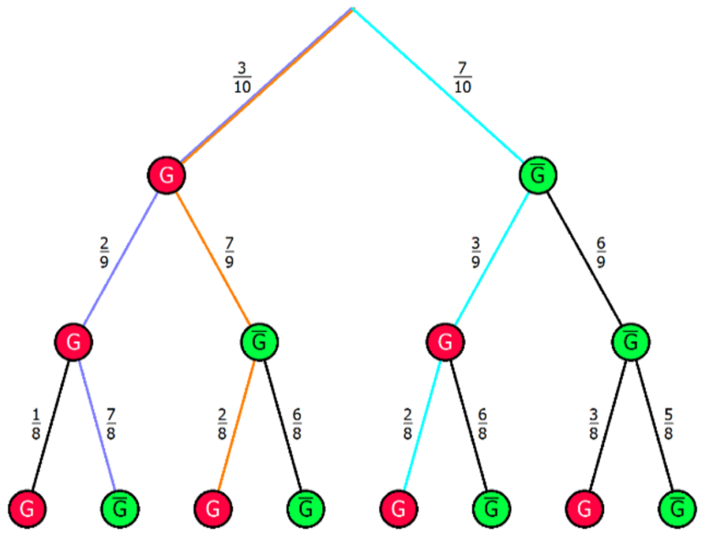
$$P(rrr) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125} = 21{,}6\ \%$$

b) erst zwei blaue und dann eine rote Kugel gezogen wird.

$$P(bbr) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{3}{5} = \frac{12}{125} = 9{,}6\ \%$$

Zur Erinnerung:
Der Summenwert der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ergebnisse ergibt 1: $P(\Omega) = 1$

Unter zehn Losen sind drei Gewinnlose. Es werden nacheinander drei Lose ohne Zurücklegen gezogen.



Berechne die Wahrscheinlichkeit

a) für genau zwei gezogene Gewinnlose.

$P(\text{„genau zwei Gewinnlose“}) =$

$P(GG\bar{G}) + P(G\bar{G}G) + P(\bar{G}GG) =$

$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{8} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{7}{40} = 17{,}5\%$

b) für mindestens ein gezogenes Gewinnlos.

$P(\text{„mind. ein Gewinnlos“}) =$

$1 - P(\text{„kein Gewinnlos“}) =$

$1 - P(\bar{G}\bar{G}\bar{G}) = 1 - \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \approx 71\%$

A8: In einem Multiple-Choice-Test werden acht Fragen gestellt. Dazu werden jeweils drei Antworten vorgegeben, von denen genau eine richtig ist. Ralf hat nicht gelernt und muss bei allen acht Fragen raten.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Ralf

a) nur die ersten drei Fragen richtig beantwortet.
b) sieben Fragen richtig beantwortet.
c) mindestens einmal richtig antwortet.

L: Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$.

a) P(„die ersten drei richtig“) = $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{6561}$

b) P(„sieben richtige Antworten“) = $8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{6561}$

c) P(„mind. eine richtige Antwort“) =

1 – P(„acht falsche Antworten“) = $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{6305}{6561}$

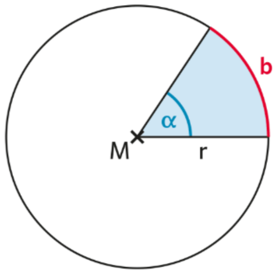
Bogenmaß

In einem Kreissektor mit Mittelpunktswinkel α und **Bogenlänge b** gilt:

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$

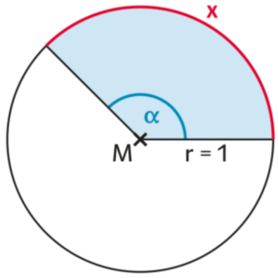
Halbkreisbogen: $b = \pi r$

Viertelkreisbogen: $b = \frac{1}{2} \cdot \pi r$



Quelle: Lambacher Schweizer 10, Klett 2022, S. 68

Definition:
Das **Bogenmaß x** eines Winkels α ist die zugehörige Maßzahl der Bogenlänge x am Einheitskreis ($r = 1$).



Quelle: Lambacher Schweizer 10, Klett 2022, S. 68

Ist α im Gradmaß gegeben, so gilt:

$$x = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi$$

Ist x im Bogenmaß gegeben, so gilt:

$$\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180°$$

Wichtige Bogenmaße:

Gradmaß	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Im *Taschenrechner* bedeutet *DEG* oder *D* Gradmaß und *RAD* oder *R* Bogenmaß.

Anmerkung:
Negative Winkel - sowohl im Gradmaß als auch im Bogenmaß - bedeuten, dass man mit dem Uhrzeigersinn geht und nicht wie üblich entgegen dem Uhrzeigersinn.

Gesucht ist der Winkel 15° im Bogenmaß:

$$x = \frac{15°}{180°} \cdot \pi = \frac{1}{12}\pi$$

Gesucht ist der Winkel 7 im Gradmaß:

$$\alpha = \frac{7}{\pi} \cdot 180° \approx 401°$$

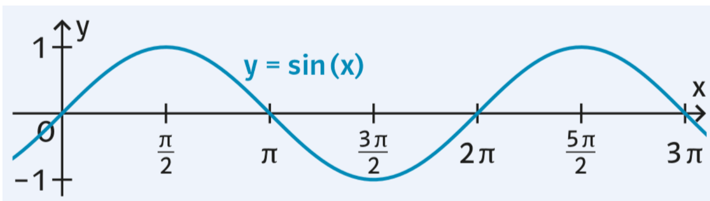
Achtung:
Ist das Bogenmaß, hier im Beispiel 7, größer als 2π ($2\pi = 6{,}283\ldots$), so beschreibt der Winkel mehr als eine Volldrehung. (hier: $360° + 41° = 401°$).

Sinus- und Kosinusfunktion

$f: x \mapsto \sin(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ heißt **Sinusfunktion**.

Eigenschaften:

- Wertemenge $\mathbb{W} = [-1; 1]$
- periodisch mit Periodenlänge 2π
- unendlich viele Nullstellen bei $x_k = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$



Quelle: Lambacher Schweizer 10, Klett 2022, S. 94

A9: Bestimme die beiden Winkel α im Intervall $[0; 2\pi]$, für die gilt: $\sin\alpha = 0{,}5$

L: $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$ (Taschenrechner auf RAD stellen und $\sin^{-1}(0{,}5)$ eingeben) und $\alpha_2 = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$

$f: x \mapsto \cos(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ heißt **Kosinusfunktion**.

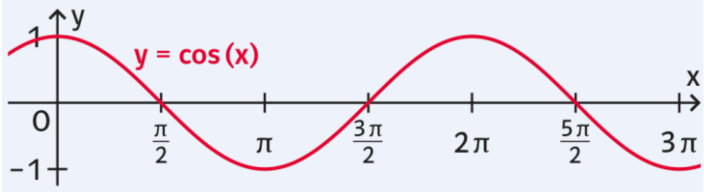
Eigenschaften:

- Wertemenge $\mathbb{W} = [-1; 1]$
- periodisch mit Periodenlänge 2π
- unendlich viele Nullstellen bei $x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Zusammenhang:

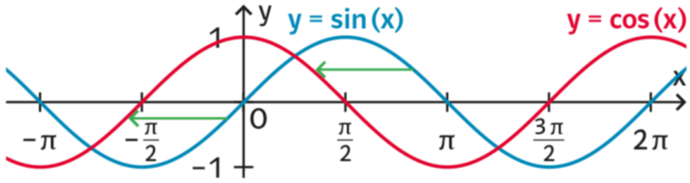
$f(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ bzw.

$f(x) = \sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$



Quelle: Lambacher Schweizer 10, Klett 2022, S. 94

Man erhält den Graphen der Kosinusfunktion, indem man den der Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ in negative x-Richtung verschiebt.



Quelle: Lambacher Schweizer 10, Klett 2022, S. 74

Allgemeine Sinusfunktion

$$g: x \mapsto a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$$

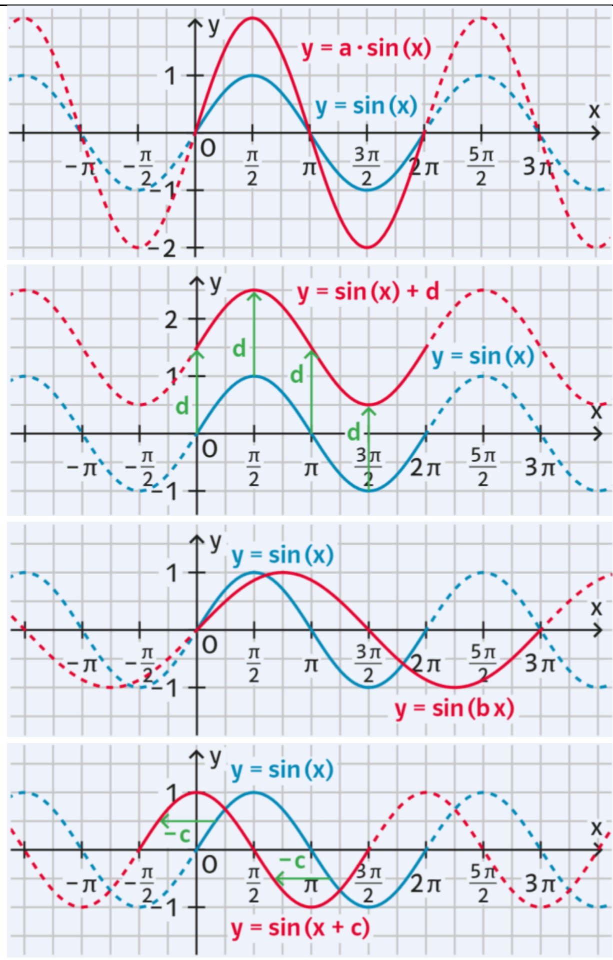
mit $a \neq 0, b \neq 0, c \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}$ geht aus dem Graphen der Sinusfunktion mit $f(x) = \sin x$ hervor durch folgende Transformationen:

- $g_1(x) = a \cdot sinx$
  Streckung des Graphen in y-Richtung mit dem Faktor $|a|$. Falls a negativ: Spiegelung an der x–Achse.

- $g_2(x) = sinx + d$ Verschiebung um d Einheiten in y-Richtung ($d > 0$ nach oben, $d < 0$ nach unten).

- $g_3(x) = \sin(bx)$ Streckung des Graphen der Sinusfunktion in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{|b|}$.
  Falls b negativ: Spiegelung an der y–Achse.

- $g_4(x) = \sin(x + c)$ Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion in x-Richtung um $|c|$ Einheiten; ($c > 0$ nach links, $c < 0$ nach rechts).



Quelle: Lambacher Schweizer 10, Klett 2022, S. 78

Beispiel: $f(x) = 0{,}7 \cdot \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 3$

⇨ $a = 0{,}7, b = 2, c = \frac{\pi}{2}$ und $d = -3$

Der zugehörige Graph zum Beispiel links entsteht aus dem Graphen der einfachen Sinusfunktion durch:

- Streckung mit dem Faktor 0,7 in y-Richtung
- Verschieben um 3 nach unten in y-Richtung
- Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung
- Verschieben um $\frac{\pi}{2}$ nach links in x-Richtung

Eigenschaften ganzrationaler Funktionen

(1) Das Verhalten ganzrationaler Funktionen für betragsmäßig große x-Werte („Verhalten im Unendlichen“) hängt ausschließlich vom Grad der Funktion n und vom Leitkoeffizienten a_n ab:

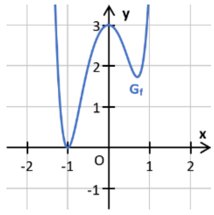
	$a_n > 0$	$a_n < 0$
n gerade	von links oben nach rechts oben	von links unten nach rechts unten
n ungerade	von links unten nach rechts oben	von links oben nach rechts unten

(2) Die Wertemenge $\mathbb{W}$ ergibt sich aus dem Verlauf des Graphen:

- Ist der Grad n ungerade, gilt unabhängig von a_n immer $\mathbb{W} = \mathbb{R}$.
- Ist n gerade und $a_n > 0$, so gilt $\mathbb{W} = [a; +\infty[$ wobei $a \in \mathbb{R}$ der kleinste Funktionswert ist.
- Ist n gerade und $a_n < 0$, so gilt $\mathbb{W} =]-\infty; a]$ wobei $a \in \mathbb{R}$ der größte Funktionswert ist.

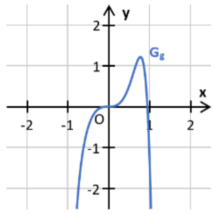
(3) Der y-Achsenabschnitt ist stets $f(0) = a_0$
$\Rightarrow S_y(0|a_0)$.

a) $f: x \mapsto 3x^6 + 2x^5 - 4x^2 - 3$



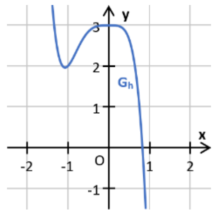
$n = 6$ ist gerade; $a_6 = 3 > 0$
$\Rightarrow$ von links oben nach rechts oben,
$\mathbb{W} = [0; +\infty[$
$f(0) = -3 \;\Rightarrow\; S_y(0|-3)$

b) $g: x \mapsto -5x^8 + 4x^3$



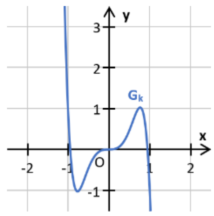
$n = 8$ ist gerade; $a_8 = -5 < 0$
$\Rightarrow$ von links unten nach rechts unten,
$\mathbb{W} =]-\infty; 1{,}2]$ (gerundet)
$f(0) = 0 \;\Rightarrow\; S_y\,(0|0)$

c) $h: x \mapsto -3x^5 - 4x^4 + 3$



$n = 5$ ist ungerade; $a_5 = 3 > 0$
$\Rightarrow$ von links unten nach rechts oben,
$\mathbb{W} = \mathbb{R}$
$f(0) = 3 \;\Rightarrow\; S_y(0|3)$

d) $k: x \mapsto -5x^7 + 4x^3$



$n = 7$ ist ungerade; $a_7 = -5 < 0$
$\Rightarrow$ von links oben nach rechts unten,
$\mathbb{W} = \mathbb{R}$
$f(0) = 0 \;\Rightarrow\; S_y(0|0)$

(4) Ansatz zur Berechnung der **Nullstellen**: $0 = f(x)$

Zum Lösen der Gleichung kommt oft der Satz vom Nullprodukt zur Anwendung:

- Funktionsterm zunächst faktorisieren
  → Zahlen oder Terme ausklammern bzw. mithilfe der binomischen Formeln
- entstehende lineare, quadratische oder Potenzgleichungen mit bekannten Verfahren lösen (wenn möglich)
- biquadratische (und andere geeignete) Gleichungen mittels Substitution lösen (siehe unten)

Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f gegeben durch
$f(x) = (-3x - 9)(x^2 + 4x + 4)(x - 1)^3 \left(x - \frac{1}{3}\right)^6$.
Bestimme die Nullstellen der Funktion. Gib die jeweilige Art der Nullstelle an, beschreibe den Verlauf des Graphen in der Umgebung der Nullstelle und begründe dies jeweils mithilfe der Vielfachheit (VFH) der Nullstelle.

$$0 = (-3x - 9)(x^2 + 4x + 4)(x - 1)^3 \left(x - \frac{1}{3}\right)^6$$
$$= -3(x + 3)(x + 2)^2(x - 1)^3 \left(x - \frac{1}{3}\right)^6$$

Satz vom Nullprodukt:

- $x_1 = -3$ mit VFH 1 $\Rightarrow$ „glatte“ Schnittstelle
- $x_2 = -2$ mit VFH 2 $\Rightarrow$ Berührstelle
- $x_3 = 1$ mit VFH 3 $\Rightarrow$ Schnittstelle, aber mit abgeflachtem Verlauf in der Umgebung von x_3 (siehe S. 10)
- $x_4 = \frac{1}{3}$ mit VFH 6 $\Rightarrow$ Berührstelle, aber mit stärker abgeflachtem Verlauf in der Umgebung von x_4

Eine Gleichung der Form $0 = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$ heißt biquadratisch. Zur Lösung substituiert man x^2 durch eine andere Variable (meist: z) und führt die biquadratische Gleichung dadurch auf eine quadratische Gleichung mit der Substitutionsvariablen z zurück, die mit bekannten Mitteln nach z aufgelöst wird (wenn möglich).
Die Lösungen der ursprünglichen Gleichung ergeben sich durch die Rücksubstitution $x = \pm\sqrt{z}$, falls diese Wurzel definiert ist.

$$0 = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = a_4(x^2)^2 + a_2x^2 + a_0$$

$$z = x^2: \quad 0 = a_4z^2 + a_2z + a_0$$

$$\Rightarrow\ z_{1,2} = \frac{-a_2 \pm \sqrt{(a_2)^2 - 4 \cdot a_4 \cdot a_0}}{2 \cdot a_4}$$

$$\Rightarrow\ x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1} \quad und\ x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f: x \mapsto x^6 - 5x^4 + 4x^2$ gegeben. Berechne die Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen.

$S_y: \quad f(0) = 0 \ \Rightarrow\ S_y(0|0)$

$S_x: \quad 0 = f(x)$

$0 = x^6 - 5x^4 + 4x^2$

$0 = x^2(x^4 - 5x^2 + 4)$

$\Rightarrow x_{1,2} = 0 \quad \text{oder} \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$x^2 = z: \quad z^2 - 5z + 4 = 0$

Lösung, z.B. Faktorisieren: $(z-1)(z-4) = 0$

$\Rightarrow z_1 = 1; \quad z_2 = 4$

$x = \pm\sqrt{z}: \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1; \quad x_{5,6} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

⇒Berührpunkt $S_{x_1}(0|0)$; ansonsten Schnittpunkte $S_{x_2}(-1|0)$; $S_{x_3}(1|0)$; $S_{x_4}(-2|0)$; $S_{x_5}(2|0)$

Die **Vielfachheit einer Nullstelle** gibt an, wie oft die Nullstelle rechnerisch auftritt. Bei vollständiger Zerlegung eines Funktionsterms in seine Linearfaktoren können alle Nullstellen und deren Vielfachheiten einfach abgelesen werden.

Geometrische Bedeutung der Vielfachheit:

- ungerade Vielfachheit: Nullstelle ist Schnittstelle; Graph schneidet die x-Achse
  ⇒ Vorzeichenwechsel (VZW) der Funktionswerte.
- gerade Vielfachheit: Nullstelle ist Berührstelle; Graph berührt die x-Achse, schneidet sie aber nicht
  ⇒ kein VZW der Funktionswerte.
- Je größer die Vielfachheit einer Nullstelle, desto flacher verläuft der Graph in der Umgebung der Nullstelle.

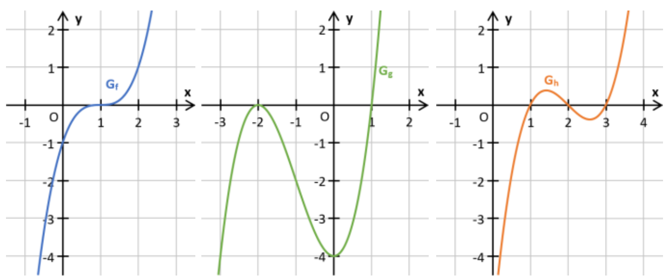
Die Summe aller Vielfachheiten ist kleiner oder gleich dem Grad der Funktion, weil sich eine Funktion vom Grad n in höchstens n Linearfaktoren zerlegen lässt. Eine Funktion vom Grad n hat damit höchstens n Nullstellen.

Jede ganzrationale Funktion mit ungeradem Grad n hat mindestens eine Nullstelle. Grund: Der Graph verläuft entweder von links oben nach rechts unten oder von links unten nach rechts oben und muss daher die x-Achse mindestens einmal schneiden.

$f(x) = (x-1)^3$: dreifache Nullstelle bei 1

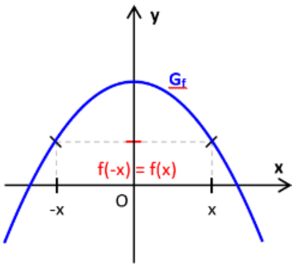
$g(x) = (x-1)(x+2)^2$: einfache Nullstelle bei 1, doppelte Nullstelle bei –2

$h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$: einfache Nullstellen bei 1, 2 und 3

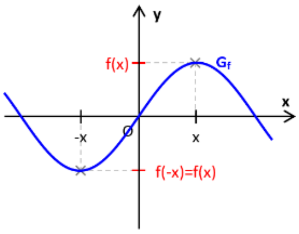


(5) Symmetrieeigenschaften

Der Graph einer Funktion f ist achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$f(-x) = f(x)$



Der Graph einer Funktion f ist punktsymmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$f(-x) = -f(x)$



Für ganzrationale Funktionen gilt auch:
- Ist die Funktion gerade, so ist ihr Graph achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse.
- Ist die Funktion ungerade, so ist ihr Graph punktsymmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs.
- Ist die Funktion weder gerade noch ungerade, so liegt keine der o. g. Symmetrien vor.
  (Es kann aber Achsensymmetrie bzgl. einer beliebigen Achse oder Punktsymmetrie bzgl. eines beliebigen Punkts P vorliegen.)

Dabei heißt eine ganzrationale Funktion gerade, wenn im Funktionsterm nur Potenzen von x mit geraden Exponenten auftreten, d. h. $a_1, a_3, a_5, \ldots$ sind Null. Sie heißt ungerade, wenn im Funktionsterm nur Potenzen von x mit ungeraden Exponenten auftreten, d. h. $a_0, a_2, a_4, \ldots$ sind Null.

Für $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f: x \mapsto -x^3(x-3)(x+3)+4$ gegeben. Überprüfe rechnerisch, ob Achsensymmetrie bzgl. der y-Achse oder Punktsymmetrie bzgl. des Koordinatenursprungs vorliegt. Gib eine zweite Begründung für die Symmetrieeigenschaften an.

Prüfe: Gilt $f(-x) = f(x)$ oder $f(-x) = -f(x)$?

Forme zunächst um:

$$f(x) = -x^3(x-3)(x+3)+4 = -x^3\,(x^2-9)+4$$
$$= -x^5 - 9\,x^3 + 4\,x^0$$

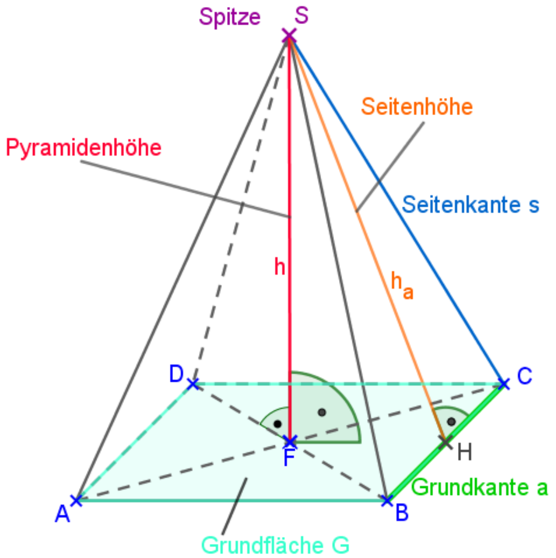
$$f(-x) = -(-x)^5 - 9(-x)^3 + 4$$
$$= -(-x^5) - 9(-x)^3 + 4 = +\,x^5 + 9x^3 + 4$$
$$\neq -\,x^5 - 9\,x^3 + 4 = f(x) \quad \textit{und}$$

$$f(-x) = x^5 + 9x^3 + 4 = -(-x^5 - 9x^3 - 4)$$
$$\neq -(-x^5 - 9x^3 + 4) = -f(x)$$

⇒ weder Achsensymmetrie bzgl. y-Achse noch Punktsymmetrie bzgl. $(0|0)$

Alternative Begründung:
Die Potenzen der Variable x haben sowohl ungerade (nämlich: 5; 3) als auch gerade Exponenten (nämlich: 0), daher ist f weder eine gerade noch eine ungerade Funktion und somit weder achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse noch punktsymmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs.

Pyramide

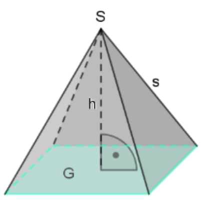


Verbindet man die Eckpunkte eines Vielecks (**Grundfläche G**) mit einem Punkt (**Spitze S**) außerhalb der Vielecksebene, so entsteht eine **Pyramide**.

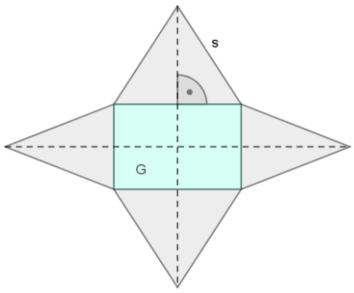
Höhe h der Pyramide: Abstand von S zu G (hier: $|\overline{FS}|$)

Bei einer **geraden Pyramide** liegt S senkrecht über dem Mittelpunkt von G, einem symmetrischen Vieleck. Damit sind alle Seitenkanten s gleich lang. Alle anderen Pyramiden sind **schiefen Pyramiden.**

Netz einer geraden Pyramide: n-eckige Grundfläche und n gleichschenklige Seitenflächendreiecke, deren Schenkellänge gleich der Seitenkante s ist.



Schrägbild

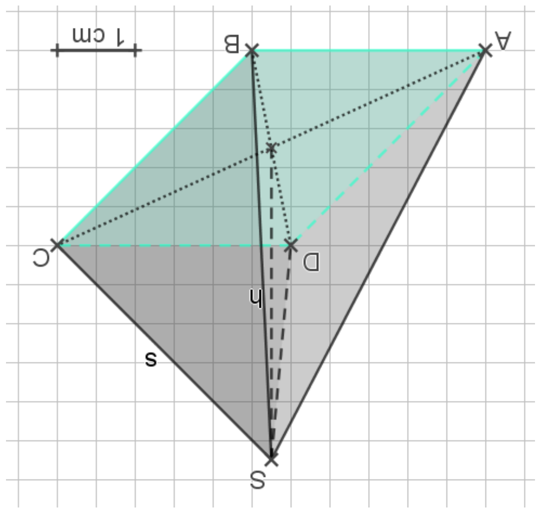


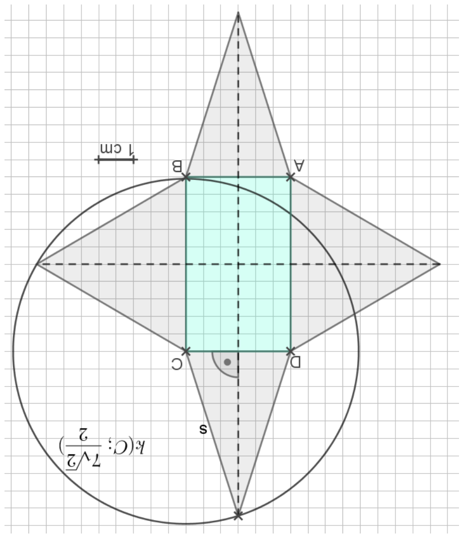
Netz

Schrägbild einer Pyramide skizzieren:

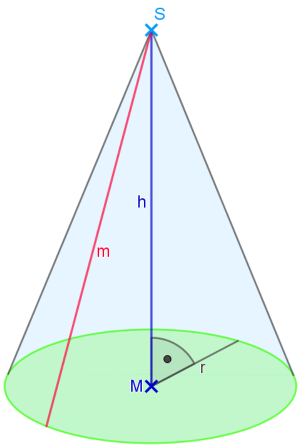
1) Skizziere das Schrägbild der Grundfläche G (meist mit $\varphi = 45°$ und $k \approx 0{,}7$, d.h. Verkürzung der senkrecht zur Zeichenfläche stehenden Seiten von 1cm auf eine Kästchendiagonale).
2) Markiere den Höhenfußpunkt F in G.
3) Trage die senkrechte Höhe h in wahrer Länge an.
4) Verbinde die Eckpunkte von G mit S.

A10: Skizziere das Schrägbild sowie das Netz einer geraden Pyramide mit der Höhe $4\ cm$, deren Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 3\ cm$ und $b = 5\ cm$ ist.





Kegel



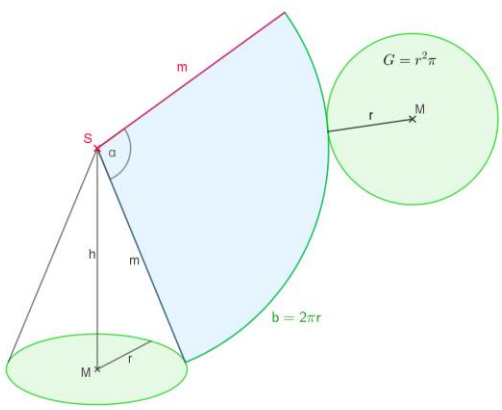
Verbindet man Punkte der Kreislinie eines Kreises (**Grundfläche G**) mit einem Punkt (**Spitze S**) außerhalb der Kreisebene, so entsteht ein **Kegel**.

Höhe h des Kegels: Abstand von S zu G

Bei einem **geraden Kegel** liegt die Spitze S senkrecht über dem Kreismittelpunkt.
Damit sind alle Mantellinien m gleich lang.
Alle anderen Kegel sind **schiefe Kegel.**

Netz eines geraden Kegels: Kreisfläche (Grundfläche) und Fläche eines Kreissektors (Mantelfläche) mit Mittelpunktswinkel α.

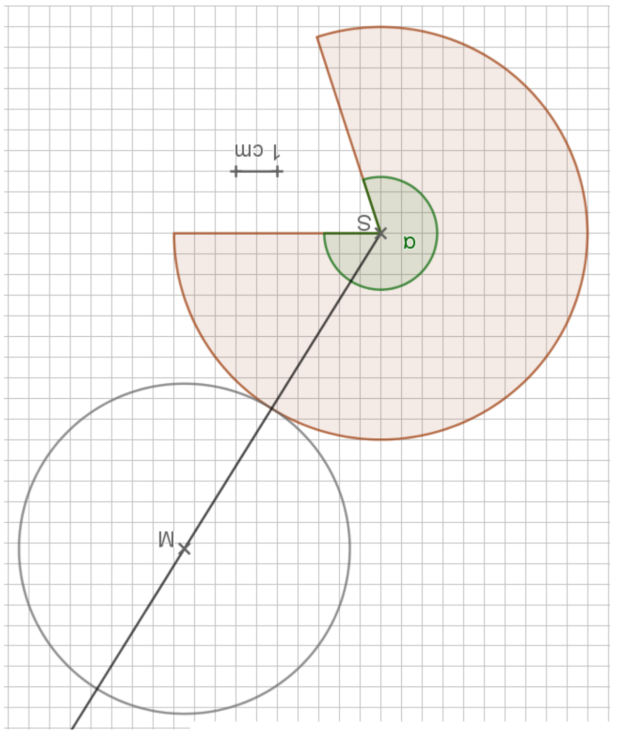
Es gilt: $\frac{\alpha}{360°} = \frac{r}{m}$



Schrägbild eines Kegels skizzieren:

1) Skizziere das Schrägbild des Grundflächen-Kreises (Ellipse, meist mit $\varphi = 90°$ und $k = 0{,}5$).
2) Markiere den Höhenfußpunkt F in G.
3) Trage die senkrechte Höhe h in wahrer Länge an.
4) Verbinde G mit S.

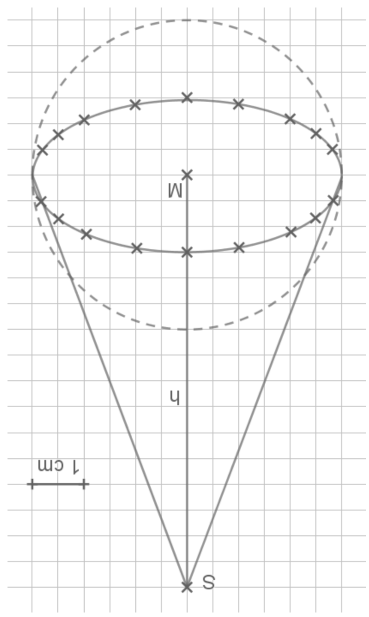
A11: Zeichne das Netz eines geraden Kegels mit dem Grundkreisradius $r = 4\ cm$ und der Mantellinie $m = 5\ cm$.



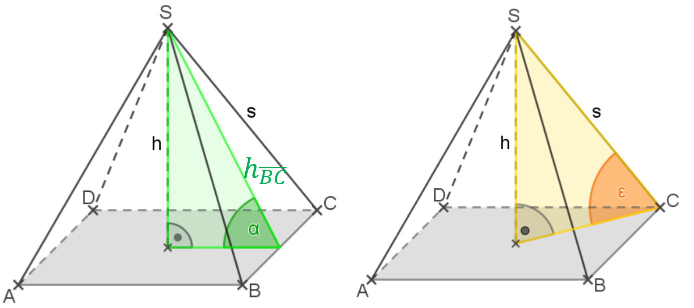
L: Berechnung des Mittelpunktswinkels α:

$\frac{\alpha}{360°} = \frac{4cm}{5cm} \Rightarrow \alpha = \frac{4}{5} \cdot 360° = 288°$

A12: Skizziere das Schrägbild eines geraden Kegels mit $r = 3\ cm$ und einer Kegelhöhe von $h = 8\ cm$.



Berechnungen in Pyramiden und Kegeln



Längen in Pyramiden (Pythagoras):

$$s^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$$

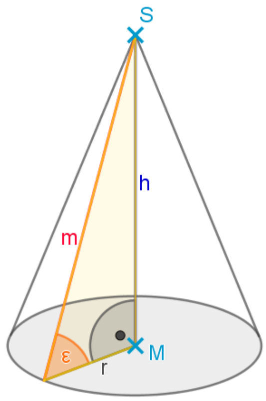
$$h_{\overline{BC}}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

Größe des Neigungswinkels α einer Seitenfläche einer Pyramide gegen die Grundfläche:

$$\sin\alpha = \frac{h}{h_{\overline{BC}}} \quad \text{oder} \quad \tan\alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}}$$

Größe des Neigungswinkels ε einer Seitenkante einer Pyramide gegen die Grundfläche:

$$\sin\varepsilon = \frac{h}{s} \quad \text{oder} \quad \cos\varepsilon = \frac{\frac{d}{2}}{s}$$



Längen in Kegeln:

$$m^2 = h^2 + r^2$$

Größe des Neigungswinkels ε einer Mantellinie eines Kegels gegen die Grundfläche:

$$\tan\varepsilon = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{r}} \quad \text{oder} \quad \sin\varepsilon = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{m}}$$

A13: Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche hat die Grundkantenlänge $a = 3\ cm$ und die Seitenkantenlänge $s = 6\ cm$.
Berechne die Höhe h_a der Pyramidenseite und die Höhe h der Pyramide sowie die Größe des Neigungswinkels α der Seitenfläche gegen die Grundfläche.

L:

$s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_a^2 \rightarrow h_a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} =$
$\sqrt{(6\ cm)^2 - (3\ cm)^2} = 3\sqrt{3}\ cm \approx 5{,}2\ cm$

$h_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \rightarrow h = \sqrt{h_a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} =$
$\sqrt{(3\sqrt{3}\ cm)^2 - (1{,}5\ cm)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{11}\ cm \approx 5{,}0\ cm$

$\sin\alpha = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{11}\ cm}{3\sqrt{3}\ cm} \rightarrow \alpha \approx 73{,}2°$

A14: Ein gerader Kegel ist $4\ cm$ hoch und hat einen Durchmesser von $6\ cm$.
Berechne die Länge der Mantellinie m sowie den Neigungswinkel ε.

L:

$m^2 = h^2 + r^2 \rightarrow m = \sqrt{h^2 + r^2} =$
$\sqrt{(4\ cm)^2 + (3\ cm)^2} = 5\ cm$

$\tan\varepsilon = \frac{4\ cm}{3\ cm} \rightarrow \alpha \approx 53{,}1°$

Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden

Ist G die Grundfläche, h die Höhe und M die Mantelfläche einer Pyramide, so gilt:

Oberflächeninhalt $O = G + M$

Volumen $V = \frac{1}{3}\, G \cdot h$

A15: Berechne das Volumen einer $8\ cm$ hohen geraden Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 30\ mm$ und $b = 5\ cm$ ist.

L: $V = \frac{1}{3}\, G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3\ cm \cdot 5\ cm \cdot 8\ cm = 40\ cm^3$

A16: Der neue Verkaufsraum einer Gärtnerei ist eine $12\ m$ hohe gerade Glaspyramide mit einer quadratischen Grundfläche ($a = 20\ m$) aus Beton.
Berechne, wie viel m^2 Glas verbaut wurden.

L: $\mathrm{h_a^2} = \left(\frac{\mathrm{a}}{2}\right)^2 + \mathrm{h}^2 \rightarrow \mathrm{h_a} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{a}}{2}\right)^2 + \mathrm{h}^2} = \sqrt{(10\ \mathrm{m})^2 + (12\ \mathrm{m})^2} =$
$2\sqrt{61}\ \mathrm{m} \approx 15{,}6\ \mathrm{m}$

$M = 4 \cdot A_D = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20\ m \cdot 2\sqrt{61}\ m \approx 624{,}8\ m$

Oberflächeninhalt und Volumen von Kegeln

Ist G die Grundfläche, h die Höhe, M die Mantelfläche und m die Mantellinie eines geraden Kegels, so gilt:

Oberflächeninhalt $O = G + M$

$O = \pi r^2 + \pi r m = \pi r\,(r + m)$

Inhalt der Mantelfläche $M = \pi r m$

Volumen $V = \frac{1}{3}\,G \cdot h = \frac{1}{3}\,\pi r^2 \cdot h$

Die Formel für das Volumen gilt auch für schiefe Kegel.

A17: Ein gerader Kegel hat den Radius $r = 5\,cm$ und eine Mantellinie von $m = 10\,cm$.
Berechne den Oberflächeninhalt (in Abhängigkeit von π) und das Volumen des Kegels.

L:
$O = \pi r^2 + \pi r m = \pi \cdot (5\text{ cm})^2 + \pi \cdot 5\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 75\pi\text{ cm}^2$
$h = \sqrt{m^2 - r^2} = \sqrt{(10\text{ cm})^2 - (5\text{ cm})^2} = 5\sqrt{3}\text{ cm}$
$V = \frac{1}{3}\pi \cdot (5\text{ cm})^2 \cdot 5\sqrt{3}\text{ cm} \approx 226{,}7\text{ cm}^3$

Oberflächeninhalt und Volumen von Kugeln

Ist r der Radius einer Kugel, so gilt:

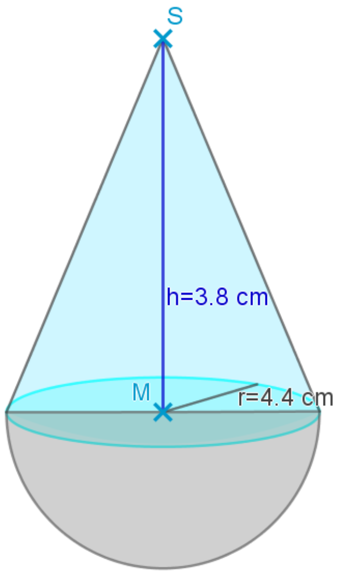
Oberflächeninhalt $O = 4\pi r^2$

Volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

A18: Ein Ball hat einen Außendurchmesser von $18{,}08\,cm$.
Das Volumen des Hohlkörpers beträgt $3{,}013\,dm^3$.
Berechne die Wandstärke d des Balls.

L:
$V_{Hohlkörper} = \frac{4}{3}\pi r_i^3 = 3013\text{ cm}^3$
$\Rightarrow r_i = \sqrt[3]{\frac{3013\text{ cm}^3}{\frac{4}{3}\pi}} \approx 8{,}96\text{ cm}$
$d = r_a - r_i \approx 9{,}04\text{ cm} - 8{,}96\text{ cm} = 0{,}08\text{ cm} = 0{,}8\text{ mm}$

A19: Bestimme das Volumen V (in Litern) und den Oberflächeninhalt O (in dm^2) des Körpers (vgl. Abb.).



L: $V = V_{Halbkugel} + V_{Kegel}$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot(4{,}4\text{ cm})^3 + \frac{1}{3}\pi\cdot(4{,}4\text{ cm})^2\cdot 3{,}8\text{ cm}$
$\approx 255{,}45\text{ cm}^3 = 0{,}25545\text{ dm}^3 \approx 0{,}26\text{ l}$
$m = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(4{,}4\text{ cm})^2 + (3{,}8\text{ cm})^2} = \frac{13\sqrt{5}}{5}\text{ cm}$
$O = O_{Halbkugel} + M_{Kegel}$
$= \frac{1}{2}\cdot 4\pi\cdot(4{,}4\text{ cm})^2 + \pi\cdot 4{,}4\text{ cm}\cdot\frac{13\sqrt{5}}{5}\text{ cm}$
$\approx 202{,}0\text{ cm}^2 = 2{,}02\text{ dm}^2$