Grundwissen M 7

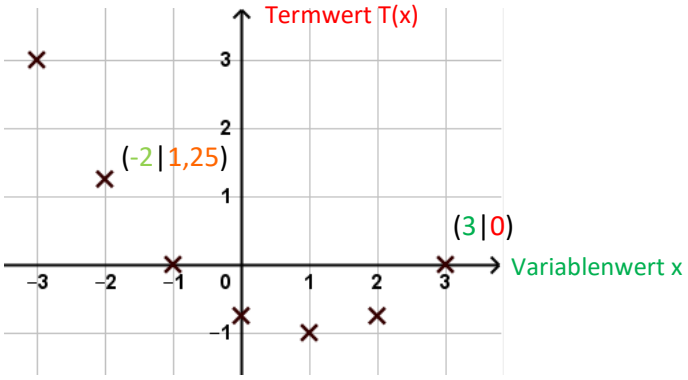
Terme

Terme sind Rechenausdrücke, die neben Zahlen, Rechenzeichen und Klammern auch Variablen enthalten. Variablen sind Stellvertreter für Zahlen oder Größen.

Setzt man in einen Term eine Zahl (oder Größe) für die Variable ein, so kann man den zugehörigen Termwert berechnen. Dabei gelten die bekannten Rechenregeln.

Mehrere eingesetzte Zahlen und die zugehörigen Termwerte kann man in einer Wertetabelle oder in einem Koordinatensystem darstellen.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
T(x)	3	1,25	0	-0,75	-1	-0,75	0



In Termen können auch mehrere Variablen auftreten.

Terme dienen dazu, Sachverhalte zu beschreiben.

Vorgehensweise zum **Aufstellen von Termen**

- Sachverhalt anhand von Beispielen untersuchen und Gesetzmäßigkeit finden
- Variable(n) festlegen und Gesetzmäßigkeit durch einen Term beschreiben

Aufgaben und Beispiele

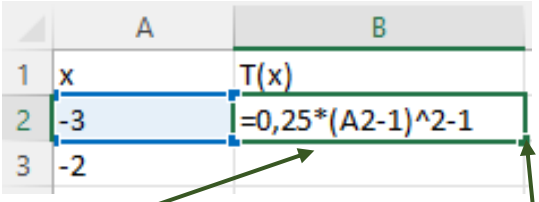
$T(x) = \frac{1}{4} \cdot (x-1)^2 - 1$

Berechne die Termwerte für $x = 3$ und $x = -2$.

$T(3) = \frac{1}{4} \cdot (3-1)^2 - 1 = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 1$
$= \frac{1}{4} \cdot 4 - 1 = 1 - 1 = 0$

$T(-2) = \frac{1}{4} \cdot (-2-1)^2 - 1 = \frac{1}{4} \cdot (-3)^2 - 1$
$= \frac{1}{4} \cdot 9 = \frac{9}{4} - 1 = 1{,}25$

Wertetabelle mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms erstellen:



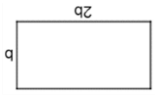
Bedeutung: In dieser Zelle soll der Ergebniswert der Formel *0,25 mal (Wert der Zelle A2 minus 1) hoch 2 minus 1* berechnet werden.

Indem man nun auf die rechte untere Ecke der Zelle B2 klickt und nach unten zieht, wird dieselbe Berechnung in den folgenden Zeilen wiederholt.

$T(a; b) = a + 2ab$

$T(3; 5) = 3 + 2 \cdot 3 \cdot 5 = 3 + 30 = 33$

A: Ein rechteckiges Grundstück ist doppelt so lang wie breit. Stelle einen Term auf, der
a) den Umfang
b) den Flächeninhalt
des Grundstücks in Abhängigkeit von der Breite b beschreibt.

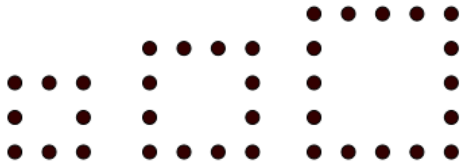


L:
a) $U(b) = 2b + b + 2b + b$

b) $A(b) = 2b \cdot b$

Vorgehensweise zum **Interpretieren von Termen**

- Bedeutung der Variable(n) klären
- Aufbau des Terms untersuchen



A: Maja hat zum dargestellten Muster einen Term aufgestellt, der die Anzahl der Punkte angibt: $T(n) = n^2 - (n-2)^2$
Interpretiere Majas Term.

L: n steht in Majas Term für die Anzahl der Punkte einer Quadratseite. Wären in dem Quadrat ebenfalls Punkte, hätte dieses n^2 Punkte. In der Mitte fehlen aber so viele Punkte, wie ein Quadrat mit einer um zwei Punkte kürzeren Seite hat. Daher hat Maja die fehlenden Punkte $(n-2)^2$ von der Anzahl der Punkte des ausgefüllten Quadrats n^2 subtrahiert.

Termumformungen

Wenn man in zwei Terme dieselben Zahlen oder Größen für die Variablen einsetzen kann und sich dabei immer bei beiden Termen derselbe Termwert ergibt, heißen die beiden Terme gleichwertig (lat.: „äquivalent“).

$T_1(a;x) = x \cdot (a - 2x)$ und
$T_2(a;x) = ax - 2x^2$ sind vielleicht äquivalent, denn z.B. ist $T_1(1;2) = -6$ und $T_2(1;2) = -6$.
ABER wir können natürlich nicht alle möglichen Paare $(a;x)$ einsetzen und überprüfen!

Terme heißen gleichartig, wenn sie nur aus je einem Produkt bestehen, in dem genau dieselben Variablen in genau derselben Potenz vorkommen.
Solche Terme darf man beim Addieren und Subtrahieren zusammenfassen.
(Gleichartige Terme müssen nicht gleichwertig sein!)

ax und $2ax$ sind zwei Terme (Produkte), die gleichartig sind, also darf man sie addieren und subtrahieren:
$ax + 2ax = 3ax$ und
$ax - 2ax = -ax$,
aber sie sind nicht gleichwertig, denn der eine Term $(2ax)$ liefert für alle eingesetzten Zahlen immer das Doppelte des anderen (ax).

ax und $2x^2$ sind jedoch nicht gleichartig (und auch nicht gleichwertig) und können deshalb nicht wie eben gerade beim Addieren zusammengefasst werden:
$ax + 2x^2 = ax + 2x^2$

Erklärvideo:
Zum Aufrufen des Videos entweder auf den folgenden Link klicken oder den nebenstehenden QR-Code einscannen.
https://youtu.be/uXHPua_Suxo

Wird ein Term unter Beachtung der Rechengesetze richtig umgeformt, entsteht automatisch ein äquivalenter Term.
Für alle rationalen Zahlen a, b, c gelten folgende Rechengesetze:

Kommutativgesetz* (KG): $a + b = b + a$
$a \cdot b = b \cdot a$
(*lat. Wort für „Vertauschen“)

Assoziativgesetz* (AG): $a + (b + c) = (a + b) + c$
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
(*lat. für „Verbinden“)

Distributivgesetz* (DG): $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
$(a + b) : c = a : c + b : c$
(*lat. für „Verteilen“)

Mithilfe des Distributivgesetzes kann Term T_1 umgeformt werden:
$T_1(a; x) = x \cdot (a - 2x) = ax - 2x^2 = T_2(a; x)$

Die Terme T_1 und T_2 sind somit äquivalent.

Beim Ausmultiplizieren wird mithilfe des DG ein Produkt in eine Summe/Differenz umgeformt.
Umgekehrt wird beim Ausklammern (oder auch Faktorisieren) eine Summe/Differenz mithilfe des DG in ein Produkt verwandelt.

ausmultiplizieren

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

ausklammern/faktorisieren

Oben wurde T_1 „ausmultipliziert“.
Wenn man umgekehrt T_2 „faktorisiert“, ergibt sich wieder T_1:
$T_2(a; x) = ax - 2x^2 = x \cdot (a - 2x) = T_1(a; x)$

aus einer Differenz wird ein Produkt

Steht vor einer Klammer ein Pluszeichen, so wird beim Auflösen der Klammer der ganze Klammerinhalt quasi mit der Zahl $+1$ multipliziert.
→ Es ändert sich nichts am Klammerinhalt und man kann die Klammer einfach „weglassen“.

$x + (a - 2x) = x + a - 2x = a - x$

$x + (a \cdot 2x) = x + a \cdot 2x = x + 2ax$

Steht vor einer Klammer ein Minuszeichen, so wird beim Auflösen der Klammer der ganze Klammerinhalt mit der Zahl -1 multipliziert.
→ Ist der Klammerinhalt eine Summe oder Differenz, ändert sich durch das DG jedes Vorzeichen in der Klammer, weil sich das Minus vor der Klammer auf jeden einzelnen Teil in der Klammer „verteilt“.

$x - (a - 2x) = x + (-a + 2x)$
$= x - a + 2x = -a + 3x$

$x - (a + 2x) = x + (-a - 2x)$
$= x - a - 2x = -a - x$

$x - (a \cdot 2x) = x + (-a \cdot 2x)$
$= x + (-2ax) = x - 2ax$

Beim Multiplizieren zweier Summen wird jeder Summand der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe multipliziert (DG) und die einzelnen Produkte dann addiert: $(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$	$(2+3)\cdot\big(1+(-4)\big) =$ $2\cdot 1 + 2\cdot(-4) + 3\cdot 1 + 3\cdot(-4) =$ $2 + (-8) + 3 + (-12) = -15$
Sonderfall: „Binomische Formeln“	
1. bin. Formel: $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$ $= a^2 + ab + ba + b^2$ $= a^2 + 2ab + b^2$	$(3+5x)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 5x + (5x)^2 =$ $9 + 30x + 25x^2$
2. bin. Formel: $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b)$ $= a^2 - ab - ba + b^2$ $= a^2 - 2ab + b^2$	$(2y-3z)^2 = (2y)^2 - 2\cdot 2y\cdot 3z + (3z)^2 =$ $4y^2 - 12yz + 9z^2$
3. bin. Formel: $(a+b)\cdot(a-b)$ $= a^2 - ab + ba - b^2$ $= a^2 - b^2$	$(v+4w)\cdot(v-4w) = v^2 - (4w)^2 =$ $v^2 - 16w^2$
Regeln für Produkte mit Potenzen: Gleiche Faktoren können zu Potenzen zusammengefasst und dadurch vereinfacht werden: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (gleiche Basis → Exponenten addieren) $a^m \cdot b^m = (a\cdot b)^m$ (gleicher Exponent → Basen multiplizieren) $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$ (Potenz von Potenz → Exponenten multiplizieren)	$a^3 \cdot b \cdot a^2 = a^{3+2}\cdot b = a^5 \cdot b$ $a^3 \cdot b^3 = (ab)^3$ $(a^3)^2 = a^{3\cdot 2} = a^6$
Gleichungen Eine Gleichung mit Variablen besteht aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen miteinander verbunden sind. Dabei muss wenigstens in einem der beiden Terme eine Variable vorkommen. <u>Lösungsstrategien:</u>	2x + 3 = 27 $4 - x^2 = x^3 + 3$
1. Gleichungen lösen durch Umkehraufgaben	x – 8 = 15 Umkehraufgabe: x = 15 + 8 =<u>23</u>
2. Gleichungen lösen durch systematisches Probieren	–7 + 4x = 2x + 5 x = 1: –3 = 8 x = 3: 5 = 11 <u>x = 6</u>: 17 = 17

3. <u>Äquivalenzumformungen:</u>

Eine kompliziertere Gleichung versucht man schrittweise in eine einfachere Gleichung umzuwandeln, ohne dass sich dabei die Lösungen ändern. Derartige Umformungen nennt man **Äquivalenzumformungen**, z.B.:

1. Termumformungen
2. Addition oder Subtraktion eines Terms oder einer Zahl auf beiden Seiten der Gleichung.
3. Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung mit einer Zahl (≠ 0) oder Division beider Seiten durch eine Zahl (≠0).

Zu 1.:
$3 \cdot (12 + x) = 12$
$36 + 3x = 12$

Zu 2.:
$12 + x = 7 \quad | -12$
$x = -5$

Zu 3.:
$0{,}5x = 6 \quad | \cdot 2$
$x = 12$

$3x = 12 \quad | :3$
$x = 4$

<u>Systematisches Lösen linearer Gleichungen:</u>

Lösungsverfahren:

1. Vereinfachen durch Termumformungen bis zur Gestalt $ax + b = cx + d$ (z.B. durch ausmultiplizieren bzw. zusammenfassen)
2. Umstellen, so dass alle Termglieder mit der Variablen auf einer Seite und alle anderen Termglieder auf der anderen Seite der Gleichung sind (ggf. zusammenfassen)
3. Division durch den Vorfaktor vor der Variablen
4. Probe durch Einsetzen

$(x + 2) \cdot (-2) = 7x - 5$ 1. Vereinfachen
$-2x - 2 = 7x - 5 \quad | -7x + 2$ 2. Umstellen
$-9x = -3 \quad | : (-9)$ 3. Division
$x = \frac{1}{3}$

l. S.: $-\frac{2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}$
r. S.: $\frac{7}{3} - 5 = \frac{7}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{8}{3}$ 4. Probe

<u>Gleichungen in Anwendungssituationen:</u>

1. Variable einführen
2. Gleichung aufstellen
3. Gleichung lösen
4. Ergebnis überprüfen (Sachzusammenhang!) und Antwort formulieren

In einem Terrarium sitzen Käfer und Spinnen. Die insgesamt 18 Tiere haben zusammen 120 Beine. Wie viele Tiere gibt es jeweils?

Anzahl der Käfer: x (1.)
Anzahl der Spinnen: $18 - x$
$6x + 8 \cdot (18 - x) = 120$ (2.)
$x = 12$ (3.)
12 Käfer und 6 Spinnen (4.)

Grundgleichung der Prozentrechnung

Fragestellungen aus der Prozentrechnung lassen sich mit der Gleichung

Prozentsatz (PS) · Grundwert (GW) = Prozentwert (PW)

beantworten, indem man sie nach der gesuchten Größe auflöst.

Berechnung des **Prozentsatzes**:

PS = $\frac{PW}{GW}$

Berechnung des **Grundwertes**:

GW = $\frac{PW}{PS}$

Eine Jeans kostete 80€ und wird um 20% reduziert. Berechne den neuen Preis!

PW = 80€ · 0,8 = 64€

Ein T-Shirt kostete ursprünlich 25€ und ist auf 15€ reduziert. Berechne um wie viel Prozent das T-Shirt reduziert wurde!

PS = $\frac{15€}{25€} = \frac{3}{5} = 60\%$

Es wurde um 40% reduziert.

Ein Paar Schuhe kostet nach einer Preissenkung von 25% noch 60€. Was kosteten die Schuhe ursprünglich?

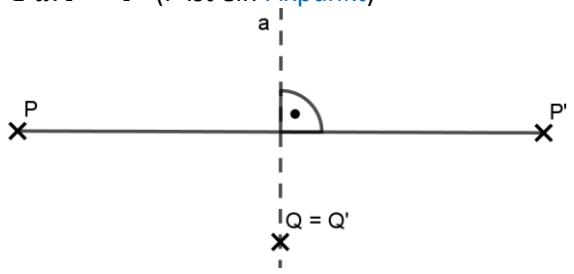
GW = $\frac{60€}{0{,}75}$ = 80€

Symmetrie

Achsensymmetrie

Sind die Punkte P und P' symmetrisch bezüglich der Achse a, dann gilt:

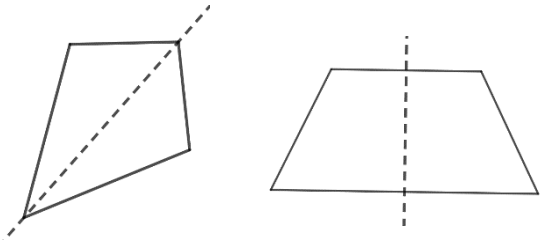
- für $P \notin a$: die Verbindungsstrecke $\overline{PP'}$ wird von der Achse a rechtwinklig halbiert
- für $P \in a$: $P = P'$ (P ist ein Fixpunkt)



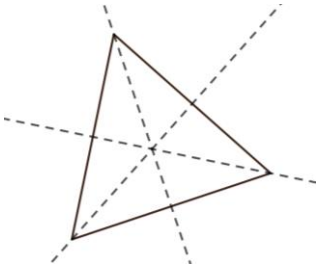
Eigenschaften der Achsenspiegelung:

- die Abbildung ist längentreu, geradentreu, (gegensinnig) winkeltreu
- die Achse a ist Fixpunktgerade (jeder Punkt auf a ist Fixpunkt)
- jede Senkrechte zu a ist Fixgerade bezüglich der Achsenspiegelung an a
- zueinander symmetrische Geraden sind parallel oder schneiden sich auf der Achse
- Punkte, die auf der Symmetrieachse liegen, sind von zueinander symmetrischen Punkten gleich weit entfernt.

Zeichne ein Viereck, das genau eine Symmetrieachse hat.

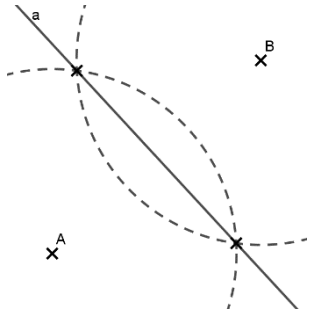


Zeichne ein Dreieck, das genau drei Symmetrieachsen hat.



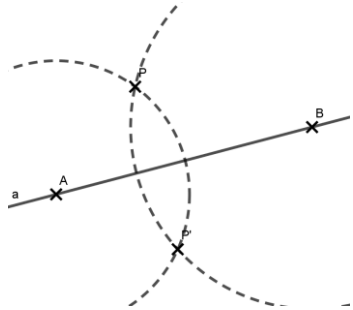
Konstruktion der Symmetrieachse:

Um Punkt und zugehörigen Bildpunkt wird jeweils ein Kreis mit gleich großem Radius gezeichnet. Die Gerade durch die beiden Schnittpunkte der Kreise ist die Achse a.



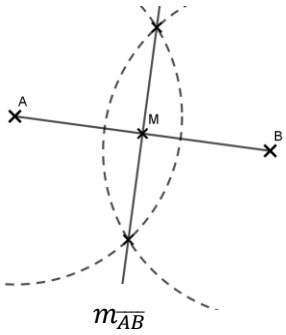
Konstruktion von Spiegelpunkten:

Auf der Spiegelachse a werden zwei beliebige Punkte A und B ausgewählt. Man zeichnet die Kreise $k_1(A; |\overline{AP}|)$ und $k_2(B; |\overline{BP}|)$. Der Schnittpunkt der Kreise ist der Bildpunkt $P' = k_1 \cap k_2$.



Mittelsenkrechte und Mittelpunkt einer Strecke

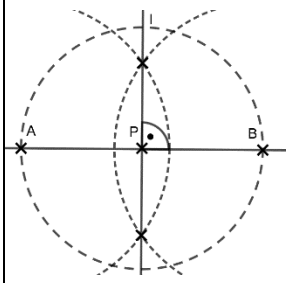
Man konstruiert die Mittelsenkrechte $m_{\overline{AB}}$ zu einer Strecke $\overline{AB}$, indem man die Symmetrieachse zu den Punkten A und B konstruiert. Der Schnittpunkt von $\overline{AB}$ und $m_{\overline{AB}}$ ist der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$.



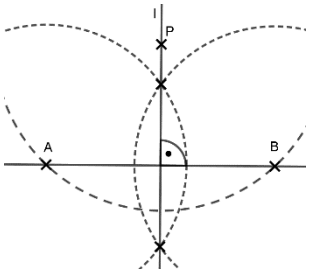
Lot

Das Lot l zu einer Geraden g durch den Punkt P erhält man, indem man zu zwei von P gleich weit entfernten Punkten A und B der Geraden g die Symmetrieachse konstruiert.

Lot errichten (P∈g)

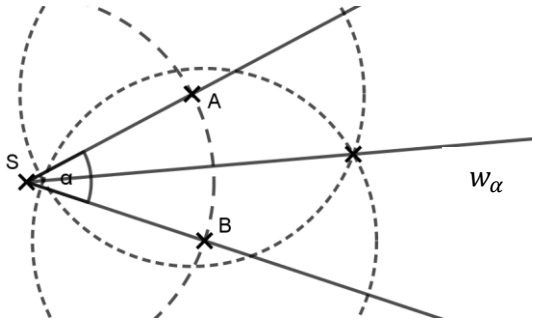


Lot fällen (P∉g)



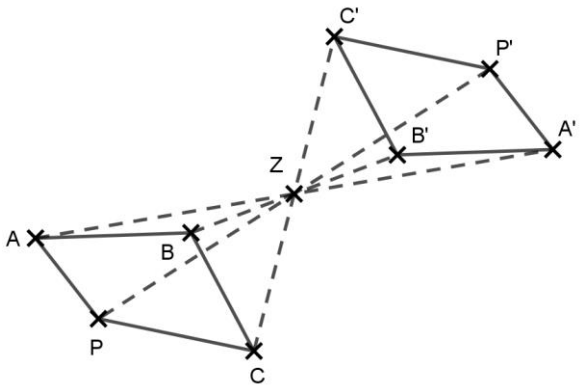
Winkelhalbierende

Man konstruiert die Winkelhalbierende w_α eines Winkels α, indem man die Symmetrieachse zu den beiden Schenkeln des Winkels konstruiert.



Punktsymmetrie

Sind die Punkte P und P' symmetrisch bezüglich des Symmetriezentrums Z, dann wird die Verbindungsstrecke dieser Punkte vom Symmetriezentrum halbiert.



Eigenschaften der Punktspiegelung:

- die Abbildung ist längentreu, geradentreu, (gleichsinnig) winkeltreu
- der einzige Fixpunkt ist Z
- zueinander symmetrische Geraden/Strecken sind parallel

Jede Punktspiegelung kann durch eine zweifache Achsenspiegelung an zueinander senkrechten Achsen, die sich im Zentrum Z schneiden, ersetzt werden.

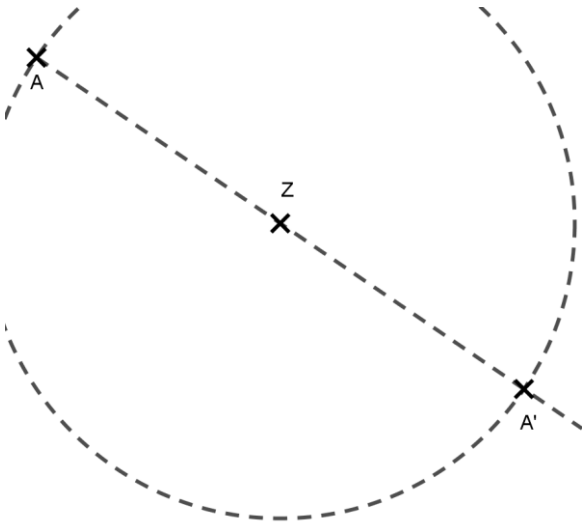
Konstruktion des Zentrums:

Man verbindet zueinander symmetrische Punkte der Figur. Der Schnittpunkt zweier dieser Verbindungsgeraden ist das Symmetriezentrum Z.

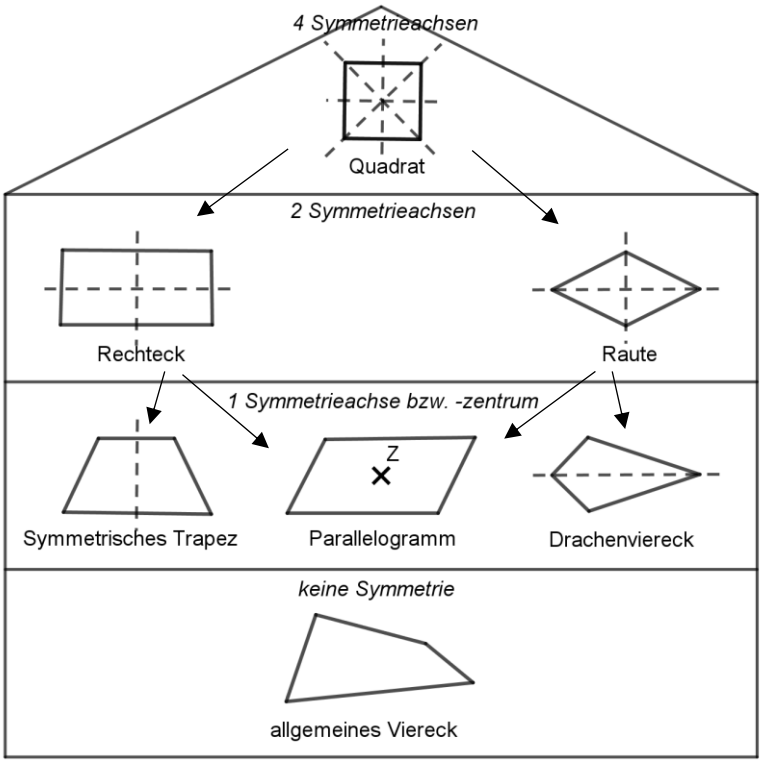
Sind nur ein Punkt A und ein Bildpunkt A' gegeben, so konstruiert man den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke $\overline{AA'}$. Dieser ist das Symmetriezentrum Z.

Konstruktion von Spiegelpunkten:

Um den Punkt A am Zentrum Z zu spiegeln, zeichnet man die Halbgerade $[AZ$ und einen Kreis $k(Z; |\overline{AZ}|)$.
Der Schnittpunkt der beiden ist der Bildpunkt A'.



Symmetrische Vierecke



A: Begründe oder widerlege die Aussage: „Jedes Trapez ist ein Rechteck."

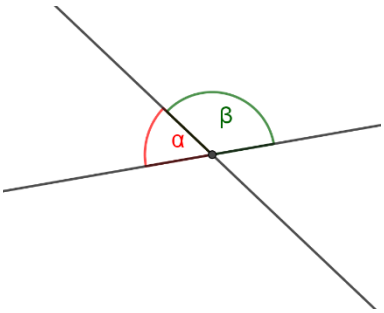
L: Falsch. Ein Rechteck muss vier rechte Winkel besitzen. Ein Trapez nicht. Das Rechteck ist aber ein spezielles Trapez.

A: Gib vier Eigenschaften einer Raute an, die ein Drachenviereck nicht hat.

L:
- vier gleich lange Seiten
- je zwei gegenüberliegende Winkel sind gleich groß
- die Diagonalen halbieren sich gegenseitig
- punktsymmetrisch und zwei Symmetrieachsen

Winkelbetrachtungen

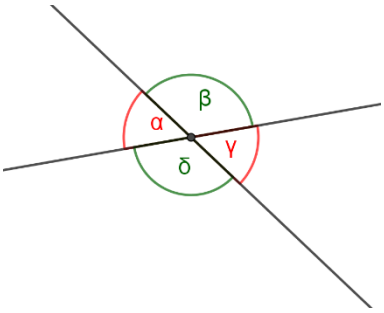
Nebenwinkel



α und β sind **Nebenwinkel**.
Sie ergänzen sich zu 180°.

$\alpha + \beta = 180°$

Scheitelwinkel



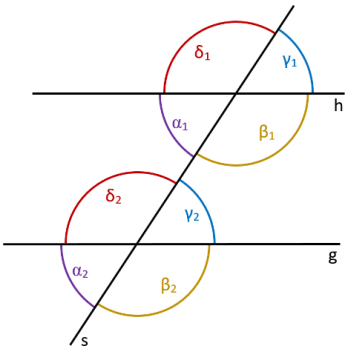
α und γ sowie β und δ sind **Scheitelwinkel.**
Sie sind gleich groß.

$\alpha = \gamma$ $\beta = \delta$

Erklärvideo:
Zum Aufrufen des Videos entweder auf den folgenden Link klicken oder den QR-Code einscannen.
https://youtu.be/-omY3EO8Fd0

Winkel an Doppelkreuzungen mit zwei parallelen Geraden

Stufenwinkel



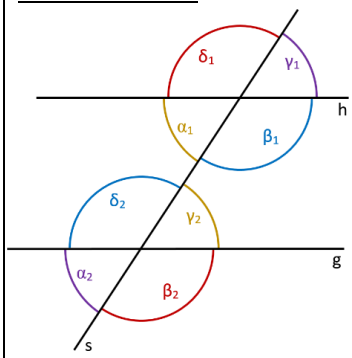
Die gleichgefärbten Winkel nennt man **Stufenwinkel.**

Die Stufenwinkel an parallelen Geradenkreuzungen sind gleich groß.

$\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$
$\gamma_1 = \gamma_2$, $\delta_1 = \delta_2$

Umgekehrt gilt auch: Sind Stufenwinkel gleich groß, so sind die Geraden g und h parallel.

Wechselwinkel



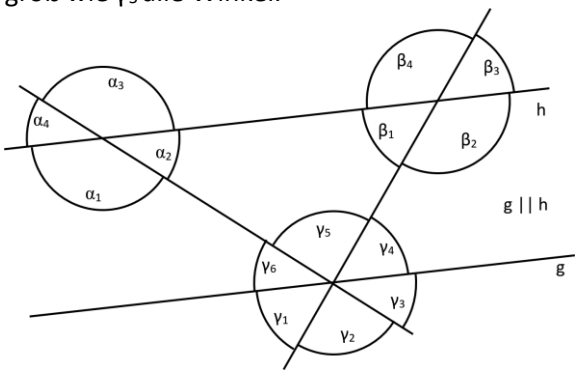
Die gleichgefärbten Winkel nennt man **Wechselwinkel.**

Die Wechselwinkel an parallelen Geradenkreuzungen sind gleich groß.

$\alpha_1 = \gamma_2$, $\beta_1 = \delta_2$
$\gamma_1 = \alpha_2$, $\delta_1 = \beta_2$

Umgekehrt gilt auch: Sind Wechselwinkel gleich groß, so sind die Geraden g und h parallel.

A: Berechne für $\beta_1 = 84°$ und γ_6 ist doppelt so groß wie γ_5 alle Winkel.



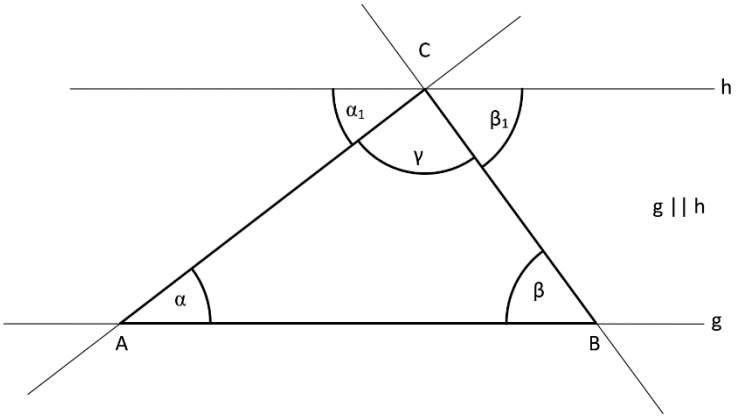
L: $\beta_3 = \beta_1 = 84°$ (Scheitelwinkel)
$\beta_2 = 180° - \beta_1 = 180° - 84° = 96°$ (Nebenwinkel)
$\beta_4 = \beta_2 = 96°$ (Scheitelwinkel)

$\gamma_4 = \beta_3 = 84°$ (Stufenwinkel)
$\gamma_1 = \gamma_4 = 84°$ (Scheitelwinkel)
$\gamma_4 + \gamma_5 + \gamma_6 = 180°$
$\gamma_4 + \gamma_5 + 2\gamma_5 = 180°$
$\gamma_4 + 3\gamma_5 = 180°$
$3\gamma_5 = 96°$
$\gamma_5 = 32°$
$\gamma_6 = 64°$
$\gamma_3 = \gamma_6 = 64°$ (Scheitelwinkel)
$\gamma_2 = \gamma_5 = 32°$ (Scheitelwinkel)

$\alpha_4 = \gamma_6 = 64°$ (Stufenwinkel)
$\alpha_2 = \gamma_6 = 64°$ (Wechselwinkel)
$\alpha_1 = 180° - \alpha_2 = 116°$ (Nebenwinkel)
$\alpha_3 = \alpha_1 = 116°$ (Scheitelwinkel)

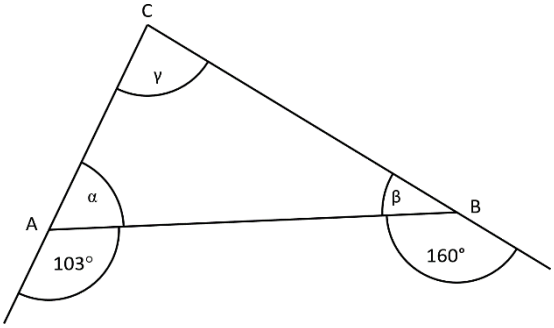
Winkelsumme in Vielecken

Die Innenwinkelsumme im **Dreieck** beträgt 180°.



$\alpha = \alpha_1$ und $\beta = \beta_1$ (Wechselwinkel an parallelen Geraden)
$\alpha_1 + \gamma + \beta_1 = 180°$
=> $\alpha + \gamma + \beta = 180°$

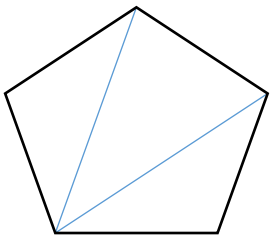
A: Berechne die Größen der fehlenden Winkel!



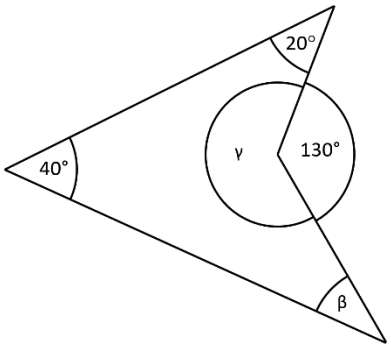
L: $\alpha = 180° - 103° = 77°$ (Nebenwinkel)
$\beta = 180° - 160° = 20°$ (Nebenwinkel)
$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 83°$ (Innenwinkelsumme im Dreieck)

Die Innenwinkelsumme im **n – Eck** beträgt:
$S = (n - 2) \cdot 180°$

z.B. 5 – Eck:
$S = (5 - 2) \cdot 180°$
$= 3 \cdot 180° = 540°$



A:



L: γ = 360° - 130° = 230°
β = 360° - 40° - 20° - 230° = 70°

Kenngrößen von Daten

Der Median teilt einen geordneten Datensatz in zwei Hälften. Dabei gilt:

- Bei einer ungeraden Datenanzahl ist der Median genau der Wert in der Mitte des geordneten Datensatzes,
- bei einer geraden Datenanzahl ist er das arithmetische Mittel (siehe Grundwissen Klasse 6) aus den beiden in der Mitte stehenden Werten.

Median und arithmetisches Mittel sind zwei verschiedene Arten von Mittelwerten. Einzelne „Ausreißer“ in einem Datensatz wirken sich stark auf das arithmetische Mittel aber nicht auf den Median aus.

Die Spannweite ist die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Wert eines Datensatzes.

Das untere Quartil ist der Median der unteren Hälfte eines geordneten Datensatzes, das obere Quartil der Median der oberen Hälfte.

Unteres Quartil, Median und oberes Quartil zerlegen einen geordneten Datensatz in vier gleich große Bereiche, in denen jeweils etwa ein Viertel der Daten liegen.

Erklärvideo:
Zum Aufrufen des Videos entweder auf den folgenden Link klicken oder den nebenstehenden QR-Code einscannen.
https://youtu.be/yeUzDoPIPOM

Wir betrachten das monatliche Taschengeld von folgenden Kindern:

Name	Betrag in €
Igor	20
Vera	30
Xaver	17
Luca	45
Peggy	13
Achim	25
Jeremy	20
Katharina	15
Sioned	30

Name	Betrag in €
Abdel	20
Hubert	30
Athanasios	28
Mandy	20
Alexander	15
Marvin	20
Xi-Chung	20
Angela	15
Antonia	36

Daraus ergibt sich folgender geordneter Datensatz:

13 15 15 15 17 20 20 20 20 | 20 20 25 28 30 30 30 36 45

Median: $\frac{20+20}{2} = 20$

Arithmetisches Mittel zum Vergleich:

$$\frac{13 + 3 \cdot 15 + 17 + 6 \cdot 20 + 25 + 28 + 3 \cdot 30 + 36 + 45}{18} = 23{,}28$$

Angenommen Luca bekommt statt 45 € nun 18000 € Taschengeld („Ausreißer“), so ist das neue arithmetische Mittel:

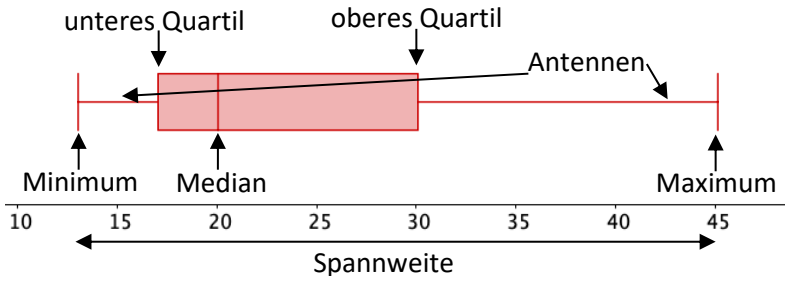
$$\frac{13 + 3 \cdot 15 + 17 + 6 \cdot 20 + 25 + 28 + 3 \cdot 30 + 36 + 18000}{18} = 1020{,}78$$

Der Median bleibt weiterhin bei 20.

13 15 15 15 **17** 20 20 20 20 | 20 20 25 28 **30** 30 30 36 45

unteres Quartil oberes Quartil

Ein Boxplot dient dazu, die Werteverteilung innerhalb eines Datensatzes anschaulich darzustellen.



Der komplette Boxplot zum Taschengeldbeispiel ist links abgebildet.

Kongruenz und Dreiecke

Kongruente Figuren

Zwei deckungsgleiche Figuren F und G nennt man zueinander **kongruent** und schreibt dafür: F ≅ G.

Die Figuren F und G haben die gleiche Form und Größe, sie stimmen in allen einander entsprechenden Stücken (Seiten, Winkel, usw.) überein und lassen sich durch Drehung und/oder Spiegelung zur Deckung bringen.

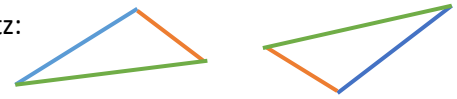
Kongruenzsätze für Dreiecke

Zwei Dreiecke sind zueinander kongruent, wenn sie

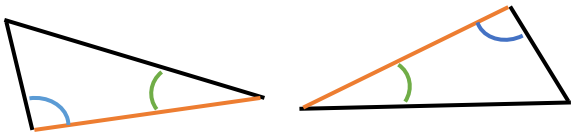
- in allen drei Seiten übereinstimmen (**SSS-Satz**).
- in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen, also entweder
  WSW-Satz
  oder
  SWW-Satz.
- in zwei Seiten und deren eingeschlossenem Winkel übereinstimmen (**SWS-Satz**).
- in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite übereinstimmen (**SsW-Satz**).

In den folgenden Beispielen sind jeweils die farbigen Seiten/Winkel gegeben:

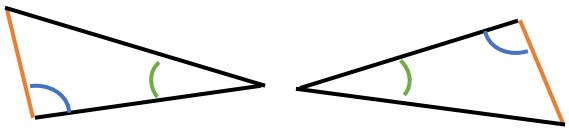
SSS-Satz:



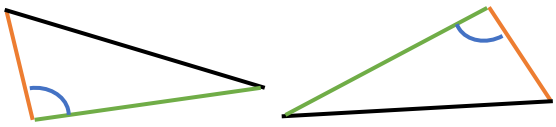
WSW-Satz:



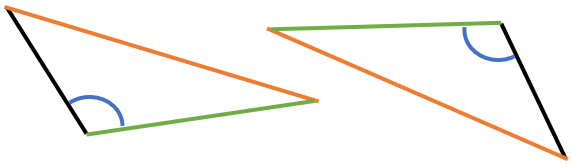
SWW-Satz:



SWS-Satz:



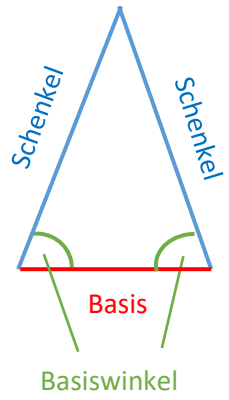
SsW-Satz:



Das gleichschenklige Dreieck

1) Das Dreieck ist gleichschenklig.
2) Das Dreieck ist achsensymmetrisch.
3) Das Dreieck besitzt zwei gleich große Winkel.

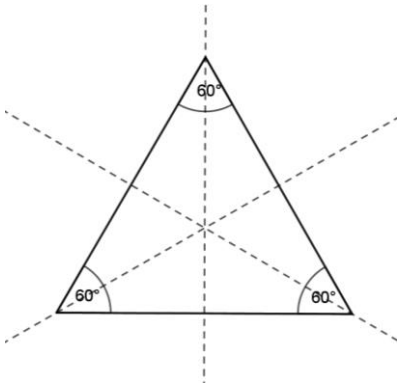
Trifft auf ein Dreieck eine der drei obigen Aussagen zu, so gelten auch die beiden anderen.



Das gleichseitige Dreieck

Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten heißt **gleichseitiges Dreieck**.

Es besitzt drei Symmetrieachsen und alle Winkel sind gleich groß, nämlich gleich 60°.



Erklärvideo:
Zum Aufrufen des Videos entweder auf den folgenden Link klicken oder den nebenstehenden QR-Code einscannen.
https://youtu.be/0mEIh7LyRuE

Satz und Kehrsatz

„Wenn es regnet, dann sind Wolken am Himmel." Der Satz besteht aus einer Voraussetzung und einer Behauptung.

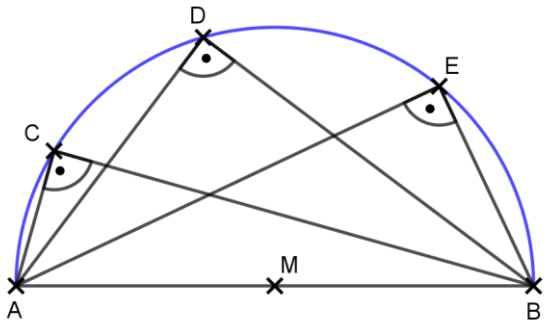
Der Kehrsatz ist nicht unbedingt richtig: „Wenn Wolken am Himmel sind, dann regnet es."

Um eine Aussage zu widerlegen, genügt es ein einziges Gegenbeispiel zu finden.
Um zu zeigen, dass eine Aussage wahr ist, genügt es nicht einzelne Beispiele anzuführen.
Es muss gezeigt werden, dass die Behauptung in **allen** erdenklichen Fällen zutrifft, in denen die Voraussetzungen erfüllt sind.

Ein mathematisches Beispiel für einen Satz, bei dem auch die Umkehrung gilt, ist der sog.:

Satz des Thales

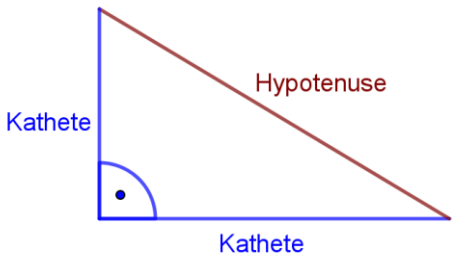
Ein Dreieck ABC hat genau dann bei C (bzw. D und E) einen rechten Winkel, wenn die Ecke C (D, E) auf dem **Thaleskreis** über $\overline{AB}$ liegt.



Bezeichnungen im rechtwinkligen Dreieck

Die Katheten sind die beiden am rechten Winkel anliegenden Seiten.

Die Hypotenuse ist die längste Dreiecksseite gegenüber des rechten Winkels.



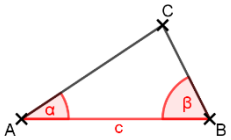
Dreieckskonstruktionen

Sind von einem Dreieck einige Größen bekannt, so lässt sich mit Hilfe der Kongruenzsätze prüfen, ob das Dreieck eindeutig konstruierbar ist. Hierbei geht man in drei Schritten vor:

1. Man fertigt eine **Planfigur** an, in der man die gegebenen Größen farbig markiert.
2. Man schreibt einen **Konstruktionsplan**, der die Reihenfolge der Konstruktionsschritte festlegt.
3. Man führt die **Konstruktion** mit Lineal, Zirkel und Bleistift aus.

Konstruiere das Dreieck ABC mit c = 5 cm; α = 50°; β = 70°.

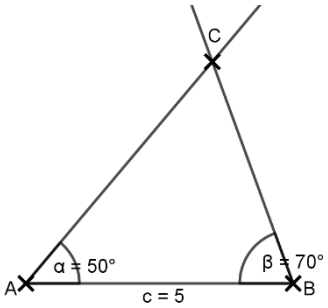
1. Planfigur:



2. Konstruktionsplan:

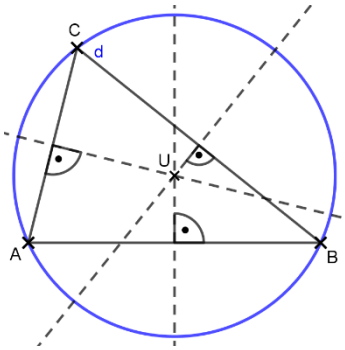
- A und B sind durch c = $\overline{AB}$ = 5 cm gegeben
- C liegt:
  1. Auf dem freien Schenkel des Winkels α = 50°, angetragen in A an $\overline{AB}$
  2. Auf dem freien Schenkel des Winkels β = 70°, angetragen in B an $\overline{AB}$

3. Konstruktion:



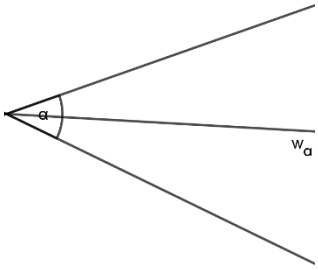
Umkreis eines Dreiecks

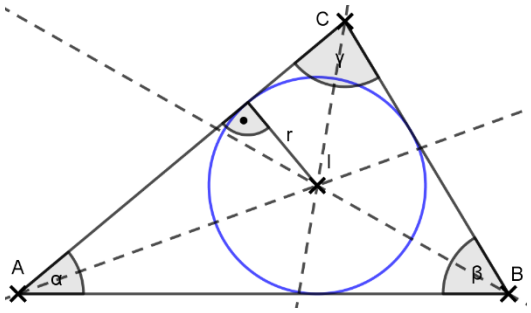
In jedem Dreieck **schneiden** sich die **Mittelsenkrechten** der drei Seiten in **einem gemeinsamen Punkt** U. Der Punkt U hat von den drei Eckpunkten jeweils den gleichen Abstand. Zeichnet man den Kreis mit dem Mittelpunkt U, auf dem alle Eckpunkte des Dreiecks liegen, so erhält man den **Umkreis** des Dreiecks.



Satz von den Winkelhalbierenden

Wenn ein Punkt von zwei sich schneidenden Geraden den gleichen Abstand hat, so liegt dieser Punkt auf der **Winkelhalbierenden**. (Die Umkehrung gilt ebenfalls.)



<u>Inkreis eines Dreiecks</u>

In jedem Dreieck **schneiden** sich die **Winkelhalbierenden** der drei Innenwinkel in einem **gemeinsamen Punkt I**. Dieser Punkt I hat von allen drei Seiten den gleichen Abstand. Zeichnet man den Kreis mit dem Mittelpunkt I, der alle drei Seiten berührt, so erhält man den **Inkreis** des Dreiecks.