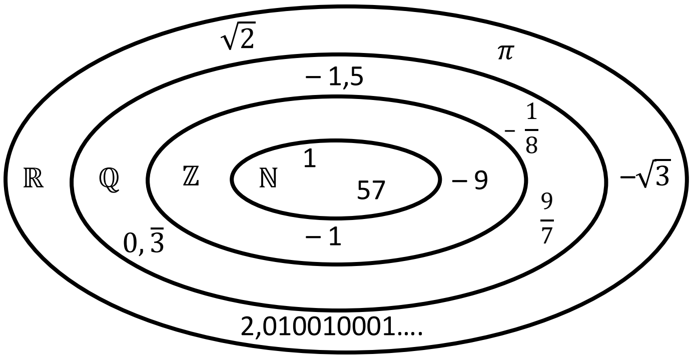
Grundwissen M 9	Aufgaben und Beispiele
Reelle Zahlen und Quadratwurzeln	
Die **Quadratwurzel** (kurz: Wurzel) von a ($a \geq 0$) ist diejenige nicht negative Zahl, die quadriert a ergibt. Schreibweise: $\sqrt{a}$. Die Zahl **a** unter der Wurzel heißt **Radikand**.	$\sqrt{64}$ =8 und $\sqrt{1{,}21}$ = 1,1 Beachte: 1) $\sqrt{0} = 0$ da $0^2 = 0$ ist 2) $\sqrt{-4}$ gibt es nicht da $(-2) \cdot (-2) = +4$ ist. 3) Die Gleichung $x^2 = 7$ hat zwei Lösungen, nämlich $x_1 = +\sqrt{7}$ und $x_2 = -\sqrt{7}$
Rationale Zahlen lassen sich als endliche oder unendliche periodische Dezimalbrüche darstellen.	$\frac{5}{4} = 1{,}25 \in \mathbb{Q}$; $\frac{2}{9} = 0{,}181818 \ldots = 0,\overline{18} \in \mathbb{Q}$
Zahlen wie $\sqrt{2}, \sqrt{1{,}3}$ oder auch π lassen sich nicht als Bruch darstellen. Ihre Dezimalbruchdarstellung ist unendlich lang und nicht periodisch. Man nennt sie **irrationale Zahlen**.	$\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots \in \mathbb{R}$ $\pi = 3{,}141592\ldots \in \mathbb{R}$
Die Menge der rationalen und irrationalen Zahlen nennt man **reelle Zahlen IR**. Veranschaulichung der Zahlenmengen: $\mathbb{N}$: natürliche Zahlen, $\mathbb{Z}$: ganze Zahlen, $\mathbb{Q}$: rationale Zahlen, $\mathbb{R}$: reelle Zahlen  	**A1:** Gib an, zu welchen Zahlenmengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$) die folgenden Zahlen gehören. a) $\sqrt{40}$ b) $-\sqrt{49}$ c) $\left(-\sqrt{5}\right)^2$ L: a) $\sqrt{40} \in \mathbb{R}$; b) $-\sqrt{49} = -7$, also $-\sqrt{49} \in \mathbb{Z}$, $-\sqrt{49} \in \mathbb{Q}$, $-\sqrt{49} \in \mathbb{R}$; c) $\left(-\sqrt{5}\right)^2 = 5$, also $\left(-\sqrt{5}\right)^2 \in \mathbb{N}$, $\left(-\sqrt{5}\right)^2 \in \mathbb{Z}$, $\left(-\sqrt{5}\right)^2 \in \mathbb{Q}$, $\left(-\sqrt{5}\right)^2 \in \mathbb{R}$;

Rechnen mit Quadratwurzeln

Für jede reelle Zahl a gilt: $\sqrt{a^2} = |a|$

Rechenregeln für Quadratwurzeln:

Multiplikationsregel: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b};$ a≥0; b≥0

Divisionsregel: $\sqrt{a}:\sqrt{b} = \sqrt{a:b};$ a≥0; b>0

Vorsicht: $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b};$ a>0; b>0

Teilweises Radizieren:

Wichtige Termumformungen:

- Rationalmachen des Nenners
  1) Nenner besteht aus einer Wurzel: Erweitere den Bruch mit dieser Wurzel
  2) Nenner ist eine Summe / Differenz, in der Wurzeln vorkommen: Erweitere, so dass die 3. Binomische Formel anwendbar ist
- Wurzelziehen mit binomischer Formel

A2: Vereinfache ohne Taschenrechner.

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{12{,}5}$ b) $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}}$ c) $\sqrt{(7a)^2 - 13a^2}$ d) $\sqrt{\frac{0{,}36u^2}{0{,}04}}$

L: a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{12{,}5} = \sqrt{2\cdot 12{,}5} = \sqrt{25} = 5$

b) $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{63}{7}} = \sqrt{9} = 3$

c) $\sqrt{(7a)^2 - 13a^2} = \sqrt{49a^2 - 13a^2} = \sqrt{36a^2} = 6|a|$

d) $\sqrt{\frac{0{,}36u^2}{0{,}04}} = \frac{\sqrt{0{,}36u^2}}{\sqrt{0{,}04}} = \frac{0{,}6|u|}{0{,}2} = 3|u|$

A3: Ziehe teilweise die Wurzel.

a) $\sqrt{50}$ b) $\sqrt{3{,}5\cdot 10^{14}}$ c) $\sqrt{72u^8}$

L: a) $\sqrt{50} = \sqrt{2\cdot 5\cdot 5} = 5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3{,}5\cdot 10^{14}} = \sqrt{3{,}5}\cdot\sqrt{(10^7)^2} = \sqrt{3{,}5}\cdot 10^7$

c) $\sqrt{72u^8} = \sqrt{2^3\cdot 3^2\cdot (u^4)^2} = 2\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cdot u^4 = 6\sqrt{2}u^4$

A4: Vereinfache den Term so weit wie möglich.

a) $\frac{7}{\sqrt{6}}$ b) $\frac{3+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}$ c) $\frac{3}{2+\sqrt{5}}$

d) $\sqrt{b^2 - 2ab + a^2}$ e) $\sqrt{0{,}25x^2 + 3xy + (3y)^2}$

L: a) $\frac{7}{\sqrt{6}} = \frac{7\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{7}{6}\sqrt{6}$

b) $\frac{3+\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} = \frac{(3+\sqrt{7})\cdot\sqrt{7}}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}+7}{2\cdot 7} = \frac{3\sqrt{7}+7}{14}$

c) $\frac{3}{2+\sqrt{5}} = \frac{3\cdot(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})\cdot(2-\sqrt{5})} = \frac{6-3\sqrt{5}}{2^2-\sqrt{5}^2} = \frac{6-3\sqrt{5}}{4-5} = \frac{6-3\sqrt{5}}{-1} = 3\sqrt{5} - 6$

d) $\sqrt{b^2 - 2ab + a^2} = \sqrt{(b-a)^2} = |b-a|$

e) $\sqrt{0{,}25x^2 + 3xy + (3y)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x\cdot 3\cdot y + 9y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x + 3y\right)^2} = \left|\frac{1}{2}x + 3y\right|$

Quadratische Funktionen

Eine Funktion der Form

$f: x \mapsto ax^2 + bx + c \;\; (a, b, c \;\in \mathbb{R} \; mit \; a \; \neq 0)$

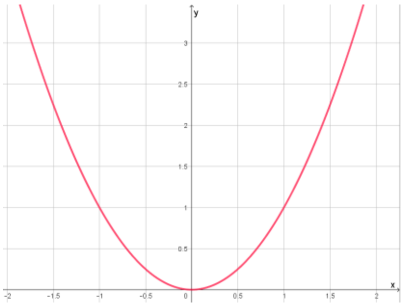
heißt **quadratische Funktion**.

a, b und c werden Koeffizienten genannt.

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine **Parabel**.

Der höchste bzw. der tiefste Punkt einer Parabel ist der **Scheitelpunkt**.

Die Normalparabel ist der Graph der Funktion $x \mapsto x^2$:



Verschiebung der Normalparabel:

Der Graph der Funktion $f: x \mapsto x^2 + e \;\; (e \in \mathbb{R})$

geht aus der Normalparabel durch Verschiebung

nach oben $(e > 0)$ bzw.

nach unten $(e < 0)$ hervor.

Der Graph der Funktion $f: x \mapsto (x + d)^2 \;\; (d \in \mathbb{R})$

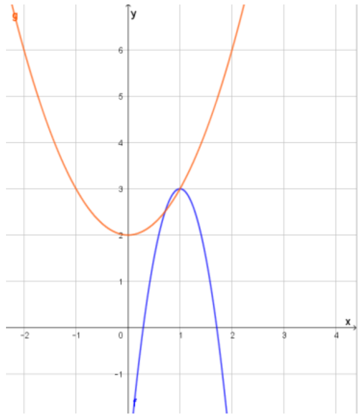
geht aus der Normalparabel durch Verschiebung

nach links $(d > 0)$ bzw.

nach rechts $(d < 0)$ hervor.

(Vorsicht: Das Vorzeichen von d und die Verschiebungsrichtung sind gegensätzlich!)

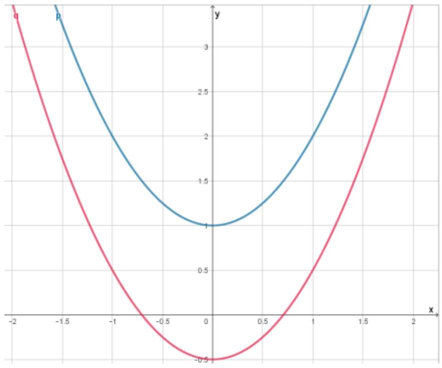
$f: x \mapsto -6x^2 + 12x - 3 \qquad g: x \mapsto x^2 + 2$



Scheitelpunkt von f: (1/3)

Scheitelpunkt von g: (0/2)

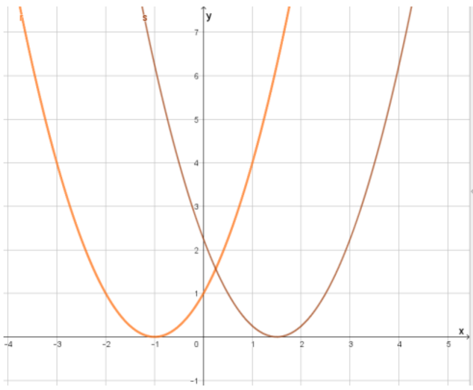
$p: x \mapsto x^2 + 1 \qquad q: x \mapsto x^2 - 0{,}5$



A5: Gib jeweils die Koordinaten des Scheitelpunkts der Graphen von p und q (siehe oben) an.

L: G_p: S (0/1), G_q: S (0/-0,5)

$r: x \mapsto (x + 1)^2 \qquad s: x \mapsto (x - 1{,}5)^2$

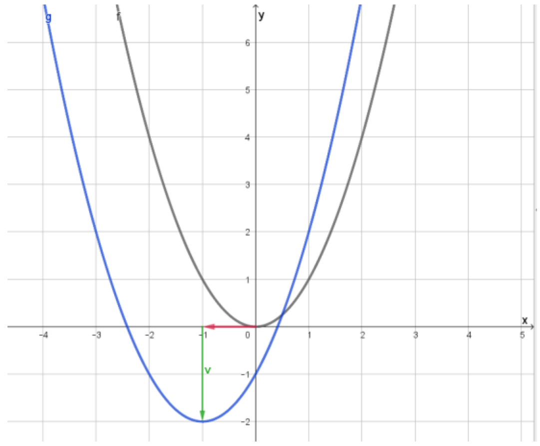


A6: Gib jeweils die Koordinaten des Scheitelpunkts der Graphen von r und s (siehe oben) an.

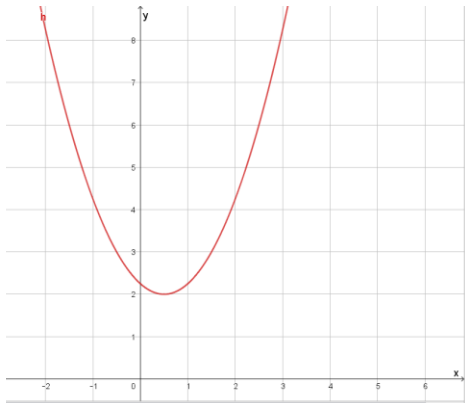
L: G_r: S (-1/0), G_s: S (1,5/0)

Die **Scheitelpunktform** einer quadratischen Funktion hat die Form $f: x \mapsto (x + \boldsymbol{d})^2 + \boldsymbol{e}$ $(d, e \in \mathbb{R})$.
Der Graph von f ist eine verschobene Normalparabel mit dem Scheitelpunkt S $(-\boldsymbol{d} / \boldsymbol{e})$.

$f: x \mapsto x^2$ $\qquad$ $g: x \mapsto (x + \mathbf{1})^2 - \mathbf{2}$



A7: Gib den Funktionsterm zum Graphen unten an.



L: $h(x) = (x - 0{,}5)^2 + 2$

Jede quadratische Funktion der Form $f: x \mapsto x^2 + bx + c$ lässt sich durch die **quadratische Ergänzung** in die Scheitelpunktform bringen.

Die quadratische Ergänzung für $f: x \mapsto x^2 - 3x + 1$:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 3x + 1 &= x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + 1 \\
&= \underbrace{x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \left(\frac{3}{2}\right)^2}_{} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 \\
&= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 2{,}25 + 1 \\
&= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \mathbf{1{,}25}
\end{aligned}
$$

Scheitelpunkt S $\left(\frac{3}{2} / -\mathbf{1{,}25}\right)$

A8: Berechne die Scheitelpunktform von $f: x \mapsto x^2 + 5x - 2$ und gib die Koordinaten des Scheitelpunkts an.

$L: x^2 + 5x - 2 = x^2 + 2\cdot\frac{5}{2}\cdot x \qquad -2$

$= x^2 + 2\cdot\frac{5}{2}\cdot x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2$

$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 6{,}25 - 2$

$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 8{,}25$

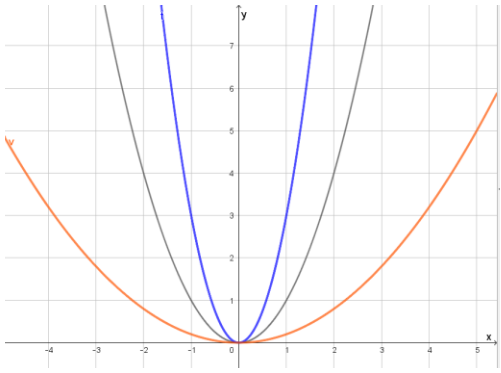
$S\left(-\frac{5}{2} / -8{,}25\right)$

Enge und **weite Parabeln**

Die Parabel der Funktion $x \mapsto a \cdot x^2 \ \ (a \neq 0)$ ist

- enger als die Normalparabel, falls $|a| > 1$,
- weiter als die Normalparabel, falls $|a| < 1$.

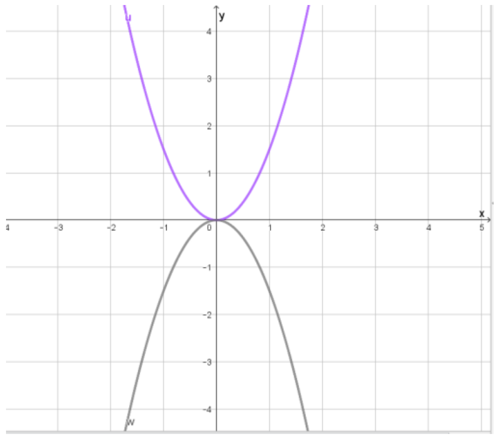
$t: x \mapsto 3\,x^2 \qquad v: x \mapsto 0{,}2\,x^2$



Die Parabel der Funktion $x \mapsto a \cdot x^2 \ \ (a \neq 0)$ ist

- nach oben geöffnet, falls $a > 0$,
- nach unten geöffnet, falls $a < 0$.

$u: x \mapsto 1{,}5\,x^2 \qquad w: x \mapsto -1{,}5\,x^2$



Eine allgemeine quadratische Funktion $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ hat die Scheitelpunktform $f: x \mapsto a(x + d)^2 + e$. Man erhält sie mit Hilfe der quadratischen Ergänzung.

Vorgehen:

Klammere zuerst den Faktor a aus:

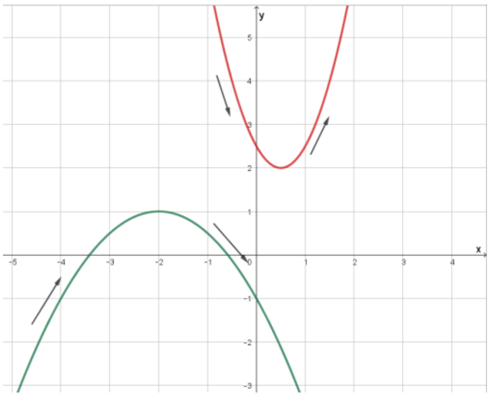
$$3x^2 + 4x - 2 = 3\cdot\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}\right)$$

Führe dann für den Term in der Klammer die quadratische Ergänzung durch:

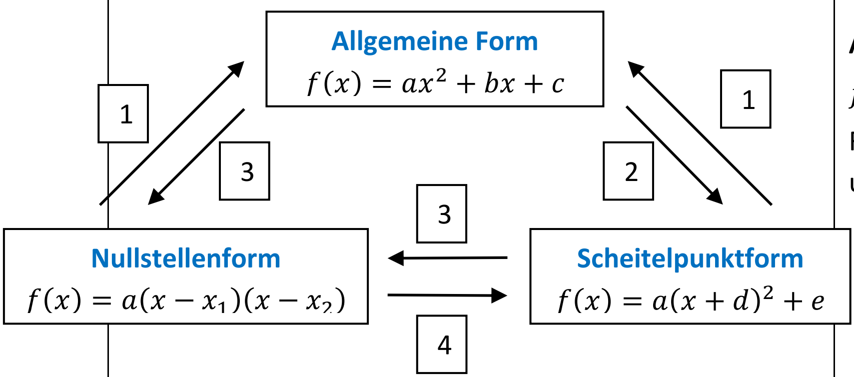
$$3\cdot\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 3\cdot\left(x^2 + 2\cdot\frac{4}{6}x + \left(\frac{4}{6}\right)^2 - \left(\frac{4}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}\right)$$

Erklärvideo:
Zum Aufrufen des Videos entweder auf den folgenden Link klicken oder den nebenstehenden QR-Code einscannen.
https://youtu.be/twrgjPlsE7I

Monotonieverhalten einer Funktion:
Werden mit zunehmenden x – Werten die Funktionswerte kleiner, dann fällt ↘ der Graph, werden die Funktionswerte größer, dann steigt ↗ der Graph.



Darstellungsformen quadratischer Funktionen



1 ausmultiplizieren
2 quadratische Ergänzung (s. oben)
3 Nullstellen berechnen (s. Lösen quadr. Gleichungen)
4 Koordinaten des Scheitelpunkts berechnen:
$-d = \frac{x_1+x_2}{2}, e = f(-d)$

Bei der **Nullstellenform** können die Nullstellen x_1 und x_2 direkt abgelesen werden.

Kürze den ergänzten Term und fasse zusammen:

$$3 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}\right) =$$

$$3 \cdot \left(\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} - \frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{10}{9}\right)$$

Multipliziere die Klammer aus:

$$= 3 \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{10}{3}$$

A9: Berechne die Scheitelpunktform von $f: x \mapsto -2x^2 - 6x + 1$ und gib die Koordinaten des Scheitelpunkts an.

L: $f: x \mapsto -2(x + 1{,}5)^2 + 5{,}5$ S (-1,5/ 5,5)

A10: Gib die Wertemenge, den größten Funktionswert, die Intervalle, in denen der Graph steigt bzw. fällt und die Koordinaten des Schnittpunkts mit der y – Achse für $f: x \mapsto -2x^2 - 6x + 1$ (siehe Aufgabe 9) an.

L: $W =]-\infty; 5{,}5]$, größter Funktionswert: y = 5,5.
Für x < -1,5 steigt der Graph, für x > -1,5 fällt er.
SP_y (0/ 1)

A11: Gib die Nullstellen der Funktion $f(x) = 4{,}5(x + \frac{1}{3})(x + \frac{5}{3})$ an.
Forme den Term anschließend in die allgemeine und in die Scheitelpunkform um.

L: $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{5}{3}$

$f(x) = 4{,}5\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{3}\right) =$

$4{,}5\left(x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}x + \frac{5}{9}\right) =$

$4{,}5\left(x^2 + 2x + \frac{5}{9}\right) = 4{,}5x^2 + 9x + 2{,}5$

$-d = \frac{-\frac{1}{3} + \left(-\frac{5}{3}\right)}{2} = -1$ und $e = f(-1)$

$= 4{,}5\left(-1 + \frac{1}{3}\right)\left(-1 + \frac{5}{3}\right) = -2$

$\Rightarrow f(x) = 4{,}5(x + 1)^2 - 2$

Lösen quadratischer Gleichungen

Jede **quadratische Gleichung** lässt sich in die Form $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ $mit\ a \neq 0$) umformen. Die Lösung dieser Gleichung entspricht den **Nullstellen der quadratischen Funktion** $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Die Gleichung lässt sich mithilfe der **Lösungsformel** $x_{1/2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ lösen.

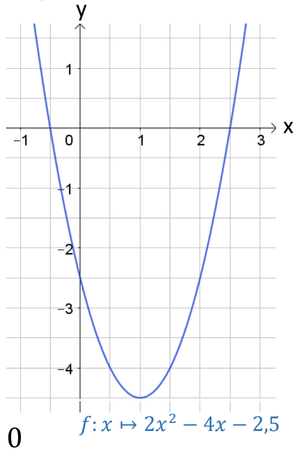
Ist hierbei die Diskriminante $D = b^2 - 4ac < 0$, so gibt es keine Lösung. Ist $D = 0$, so gibt es eine Lösung. Ist $D > 0$, so gibt es zwei Lösungen.

Sonderfälle:
Ist $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$, so lässt sich ax ausklammern und es gilt: „Ein Produkt ist null, wenn einer seiner Faktoren null ist.“
Ist $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, so lässt sich die Gleichung durch Umformen und Wurzelziehen nach x auflösen.

$2x^2 - 3 = 4x - 0{,}5 \;|-4x;\ +0{,}5$
$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 2{,}5 = 0$

hier: $a = 2; b = -4; c = -2{,}5$

$x_{1/2} = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot2\cdot(-2{,}5)}}{2\cdot2}$
$= \frac{4\pm\sqrt{36}}{4} = \frac{4\pm6}{4}$
$\Rightarrow x_1 = -0{,}5,\ x_2 = 2{,}5$



$c = 0$
$2x^2 - 10x = 0$
$\Leftrightarrow 2x(x-5) = 0$
$\Leftrightarrow x_1 = 0\ und\ x_2 = 5$

$b = 0$
$-x^2 + 2 = 0 \;|-2$
$\Leftrightarrow -x^2 = -2 \,|\cdot(-1)$
$\Leftrightarrow x^2 = 2 \;|\sqrt{\ }$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

A12: Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$.

L: Lösungsformel mit $a = 3, b = 5, c = 2$
$x_{1/2} = \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3} = \frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{6} = \frac{-5\pm1}{6}$
$\Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{2}{3}$

Lineares Gleichungssysteme (LGS) lösen

1. Auflösen einer Gleichung nach einer der drei Variablen
2. Einsetzen des ermittelten Terms in die beiden anderen Gleichungen.
3. Lösen des Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten
4. Einsetzen der Lösungen in die erste Gleichung zur Bestimmung der dritten Unbekannten

Eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist bereits eindeutig durch drei Punkte ihres Graphen festgelegt. Durch Einsetzen der Koordinaten der drei Punkte lässt sich ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen zur Bestimmung der Variablen a, b und c aufstellen.

Eine Parabel verläuft durch die Punkte $A(1|-0{,}5)$, $B(-3|3{,}5)$ und $C(-4|2)$.
Bestimme ihren Funktionsterm f(x) = ax² + bx + c.

A∈G$_f$:	(I)	–0,5 = a + b + c
B∈G$_f$:	(II)	3,5 = 9a – 3b + c
C∈G$_f$:	(III)	2 = 16a – 4b + c

1. (I) –0,5 = a + b + c => (Ia) c = –0,5 – a – b
2. (Ia) in (II): 3,5 = 9a – 3b + (–0,5 – a – b)
3,5 = 9a – 3b – 0,5 – a – b
4 = 8a – 4b
b = 2a – 1 (IIa)
(Ia) in (III): 2 = 16a – 4b + (–0,5 – a – b)
2 = 16a – 4b – 0,5 – a – b
2,5 = 15a – 5b (IIIa)
3. (IIa) in (IIIa): 2,5 = 15a – 5· (2a – 1)
2,5 = 15a – 10a + 5
–2,5 = 5a
a = –0,5 In (IIa): **b** = 2·(–0,5) – 1= **–2**
4. In (Ia): **c** = –0,5 – (–0,5) – (–2) = –0,5 + 0,5 + 2 = **2**
=> **f(x) = –0,5x² – 2x + 2**

Funktionsterme von Parabeln bestimmen

Zur Bestimmung eines Funktionsterms einer quadratischen Funktion wählt man je nach gegebenen Punkten einen geeigneten Ansatz:

(1) Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$
(2) Scheitelpunktform: $f(x) = a \cdot (x+d)^2 + e$
(3) Nullstellenform: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$

1. **Gegeben: Drei Punkte A, B und C auf dem Graphen**
   ➔ **Ansatz**: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (Allgemeine Form)
   ➔ **Lösungsverfahren**: Gleichungssystem mit drei Gleichungen aufstellen (siehe oben)
2. **Gegeben: Scheitelpunkt $\boldsymbol{S(-d|e)}$ und ein weiterer Punkt $\boldsymbol{P(x|y)}$**
   ➔ **Ansatz**: $f(x) = a \cdot (x+d)^2 + e$ (SP-Form)
   ➔ **Lösungsverfahren**:
   - Einsetzen der Scheitelpunktkoordinaten und der Koordinaten des Punktes P
   - Ausrechnen des Parameters a

   Beispiel: $f(x) = a \cdot (x+d)^2 + e$ mit $S(-3|-3)$ und $P(-2|-1)$

   $-1 = \mathrm{a} \cdot (-2+3)^2 + (-3)$

   $-1 = \mathrm{a} \cdot (1)^2 - 3 \qquad |+3$

   $\underline{2 = \mathrm{a}}$

   ➔ $f(x) = 2 \cdot (x+3)^2 - 3$
3. **Gegeben: Zwei Nullstellen $\boldsymbol{x_1}$ und $\boldsymbol{x_2}$ ein weiterer Punkt $\boldsymbol{P(x|y)}$**
   ➔ **Ansatz:** $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ (NS-Form)
   ➔ **Lösungsverfahren:**
   - Einsetzen der Nullstellen und der Koordinaten des Punktes P
   - Ausrechnen des Parameters a

   Beispiel: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ mit den Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 3$ sowie $P(0|3)$

   $3 = a \cdot (0 - (-3)) \cdot (0 - 3)$

   $3 = a \cdot 3 \cdot (-3)$

   $3 = a \cdot (-9) \qquad |:(-9)$

   $-\frac{1}{3} = a$

   ➔ $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot (x+3) \cdot (x-3)$

Extremwertaufgaben

Probleme, bei denen man einen kleinsten Wert (Minimum) oder einen größten Wert (Maximum) bestimmen will, nennt man **Extremwertprobleme**. Führt die Suche nach dem Extremwert einer Größe auf eine quadratische Funktion, so liefert der Scheitelpunkt des Graphen diesen Extremwert.

Vorgehensweise:

1. Aufstellen eines Ansatzes für die Größe, die extremal (so klein/groß wie möglich) werden soll
2. Aufstellen von Gleichungen, die die Beziehungen zwischen den Variablen beschreiben (Nebenbedingung)
3. Bestimmen eines Funktionsterms für die gesuchte Größe in Abhängigkeit von nur einer Variablen (Zielfunktion)
4. Ermitteln des Scheitelpunktes des Zielfunktion
5. Angabe des Extremwerts

Erklärvideo:

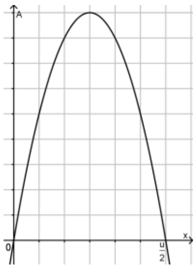
Zum Aufrufen des Videos entweder auf den folgenden Link klicken oder den nebenstehenden QR-Code einscannen.

https://youtu.be/HkIrmC_XlfU

Ein Rechteck hat den Umfang 24cm. Bestimme die Seitenlängen eines Rechtecks so, dass der Flächeninhalt möglichst groß wird.

Sei x die Länge und y die Breite des Rechtecks in cm:

1) Ansatz für die Größe, die maximal werden soll (*hier: Flächeninhalt*): $A(x;y) = x \cdot y$
2) Aufstellen einer Nebenbedingung (*hier: Umfang*): $U = 2(x+y) = 24 \ \rightarrow y = 12 - x$
3) Funktionsterm für die gesuchte Größe, der nur noch von einer Variablen abhängt (Zielfunktion):
$$A(x) = x \cdot y = x \cdot (12 - x) = -x^2 + 12x$$
4) Suche nach dem größten Funktionswert (Maximum oder Minimum) → Scheitelpunkt durch quadratische Ergänzung:



$A(x) = -x^2 + 12x =$
$-(x^2 - 12x) =$
$-(x^2 - 12x + 6^2 - 6^2) =$
$-[(x-6)^2 - 36] =$
$-(x-6)^2 + 36$

➔ Scheitelpunkt bei S (6|36)

5) Angabe des Extremwerts:
Das Rechteck mit den Seitenlängen $x = 6cm$ (vgl. x_s) und $y = 12cm - 6cm = 6cm$ (vgl. Nebenbedingung) hat mit 36cm² (vgl. y_s) den größten Flächeninhalt von allen Rechtecken mit dem Umfang 24cm.

Schnittpunkte von Funktionsgraphen

Vorgehensweise zur Berechnung des Schnittpunkts zweier Funktionsgraphen G_f und G_g:

1. Gleichsetzen der Funktionsterme: $f(x) = g(x)$
2. Lösung der sich ergebenden quadratischen Gleichung (z.B. mit der Lösungsformel) → Jede Lösung der Gleichung liefert die x-Koordinate eines Schnittpunkts
3. Berechnung der y-Koordinate des Schnittpunkts durch Einsetzen des ermittelten x-Werts in einen der beiden Funktionsterme

Berechne den Schnittpunkt der Funktionsgraphen von f mit $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ und g mit $g(x) = 0{,}75x + 4{,}75$.

1. $f(x) = g(x)$

$\frac{x-2}{x+1} = 0{,}75x + 4{,}75 \qquad | \cdot (x+1)$

2. $x - 2 = (0{,}75x + 4{,}75) \cdot (x+1)$

$x - 2 = 0{,}75x^2 + 0{,}75x + 4{,}75x + 4{,}75$

$x - 2 = 0{,}75x^2 + 5{,}5x + 4{,}75 \qquad | -x; \ +2$

$0 = 0{,}75x^2 + 4{,}5x + 6{,}75$

$$x_{1,2} = \frac{-4{,}5 \pm \sqrt{(4{,}5)^2 - 4 \cdot 0{,}75 \cdot 6{,}75}}{2 \cdot 0{,}75}$$
$$= \frac{-4{,}5 \pm \sqrt{20{,}25 - 20{,}25}}{1{,}5} = \frac{-4{,}5}{1{,}5} = -3 = x_s$$

3. $y_s = g(x_s) = 0{,}75 \cdot (-3) + 4{,}75 = 2{,}5$

➔ Schnittpunkt: $S\ (-3|2{,}5)$

Wahrscheinlichkeit verknüpfter Ereignisse

Mengendiagramme

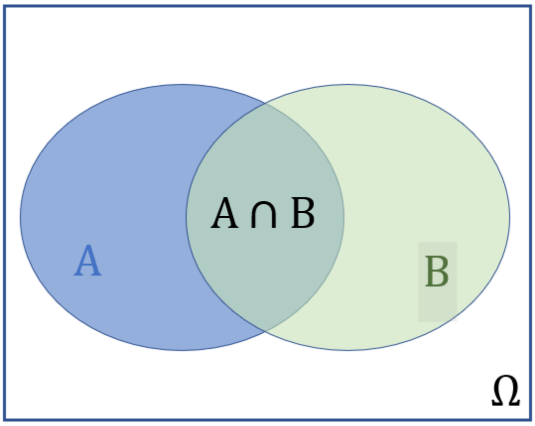
Bei einem **Zufallsexperiment** (ZE) können verschiedene Ereignisse betrachtet werden. Diese werden mit Großbuchstaben bezeichnet.

In der Klasse 10a werden alle Schüler*INNEN einerseits befragt, ob Mathematik ihr Lieblingsfach ist und andererseits, ob sie das Grundwissen aus der neunten Jahrgangsstufe wiederholt haben.
Man definiert also für jede Antwort:
Ereignis A ≔ „Lieblingsfach ist Mathematik.“
Ereignis B ≔ „Grundwissen wurde wiederholt.“

Bei der **Verknüpfung zweier Ereignisse** können verschiedene Konstellationen auftreten. Diese werden in **Mengendiagrammen** bildlich dargestellt. Folgende Fälle kommen häufig vor:

Die **Schnittmenge** zweier Ereignisse A und B besteht aus den Ergebnissen, die sowohl in A **und** in B enthalten sind. Symbolschreibweise:

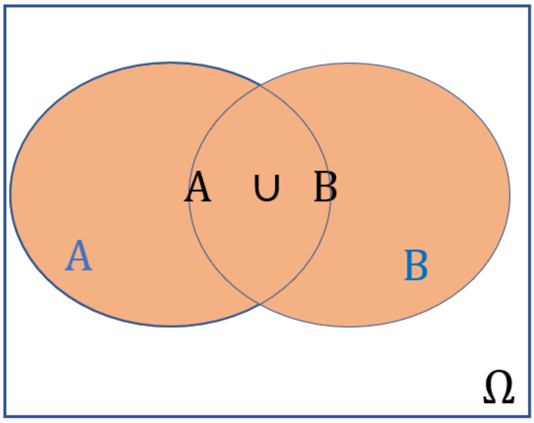
$A \cap B$ (mathematisches „Und“)



Zur Schnittmenge $A \cap B$ gehören die Schüler*INNEN, deren Lieblingsfach Mathematik ist **und** die auch das Grundwissen wiederholt haben.

Die **Vereinigungsmenge** zweier Ereignisse A und B besteht aus den Ergebnissen, die in A **oder** in B enthalten sind. Symbolschreibweise:

$A \cup B$ (mathematisches „Oder“)

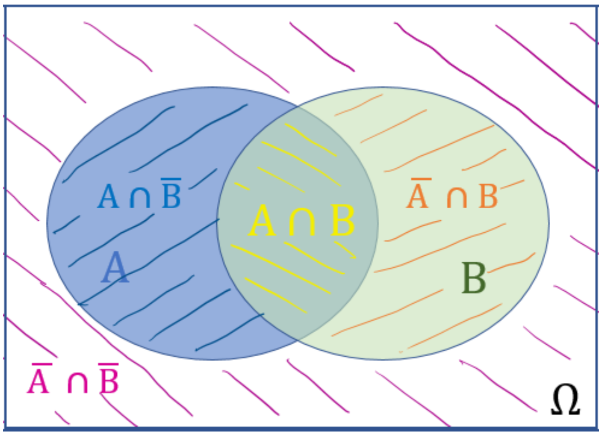


Zur Vereinigungsmenge $A \cup B$ gehören Schüler*INNEN, deren Lieblingsfach (entweder) Mathematik ist **oder** die das Grundwissen wiederholt haben (oder beides).

Achtung: Das mathematische „Oder“ entspricht nicht dem umgangssprachlichen „Entweder Oder“, sondern: „Entweder A oder B oder beide zusammen (oder/und).“

Umgangssprachlich: „Wir essen Döner oder Pizza zu Mittag.“ Beinhaltet NICHT: „Wir essen beides zu Mittag.“

Bei der Betrachtung der beiden Ereignisse A und B eines ZE wird die **Ergebnismenge** durch die vier Schnittmengen $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$ und $\overline{A} \cap \overline{B}$ vollständig zerlegt. Jedes Ergebnis liegt in genau einer dieser Teilmengen.



Eine befragte Person hat entweder

- Mathematik als Lieblingsfach und das Grundwissen gelernt ($A \cap B$).
- Mathematik nicht als Lieblingsfach und Grundwissen gelernt ($\overline{A} \cap B$).
- Mathematik als Lieblingsfach und das Grundwissen nicht gelernt ($A \cap \overline{B}$).
- Mathematik nicht als Lieblingsfach und das Grundwissen nicht gelernt ($\overline{A} \cap \overline{B}$).

Sie gehört also zu genau einer dieser Schnittmengen.

A13: Ein Spielwürfel wird einmal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse A := „Augenzahl gerade" und B := „Augenzahl kleiner 4". Gib die Ereignisse A und B in Mengenschreibweise an. Gib anschließend die Schnitt- und Vereinigungsmenge sowie die übrigen Kombinationen aus Schnittmengen der Ereignisse und Gegenereignisse in Mengenschreibweise an.

L: $A = \{2;4;6\}$; $\overline{A} = \{1;3;5\}$
$B = \{1;2;3\}$; $\overline{B} = \{4;5;6\}$
Schnittmenge: Die Elemente, die in A und in B gleichzeitig vorkommen: $A \cap B = \{2\}$
Vereinigungsmenge: Die Elemente, die in A oder in B (oder in beiden gleichzeitig) vorkommen: $A \cup B = \{1;2;3;4;6\}$
$\overline{A} \cap B = \{1;3\}$; $A \cap \overline{B} = \{4;6\}$; $\overline{A} \cap \overline{B} = \{5\}$

Vierfeldertafel und Wahrscheinlichkeiten

Für zwei Ereignisse A und B, die bei einem Zufallsexperiment betrachtet werden, das mehrmals (also n-mal) durchgeführt wird, werden die absoluten Häufigkeiten H in einer Vierfeldertafel übersichtlich dargestellt. Dort treten auch die vier möglichen Ereignis-Schnittmengen auf.

	A	$\overline{A}$	
B	$H(A \cap B)$	$H(\overline{A} \cap B)$	$H(B)$
$\overline{B}$	$H(A \cap \overline{B})$	$H(\overline{A} \cap \overline{B})$	$H(\overline{B})$
	$H(A)$	$H(\overline{A})$	$H(\Omega)$

Die Spaltensummen und Zeilensummen bilden die absoluten Häufigkeiten der einzelnen Ereignisse. Unten rechts findet sich die Gesamtzahl an Durchführungen.

Eine Befragung in der 10a wurde bei 28 Schüler*INNEN durchgeführt. Die Vierfeldertafel mit den Ergebnissen A und B (siehe oben) sieht wie folgt aus:

	A	$\overline{A}$	
B	10	5	15
$\overline{B}$	6	7	13
	16	12	28

Daraus kann man z.B. ablesen:

- 15 der befragten Schüler*INNEN haben das Grundwissen wiederholt.
- 6 der befragten Schüler*INNEN haben Mathe als Lieblingsfach und das Grundwissen nicht wieder-holt.

Statt absoluter Häufigkeiten können auch die relativen Häufigkeiten eingetragen werden. Sie können als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden.

	A	$\overline{A}$	
B	$\frac{H(A \cap B)}{H(\Omega)}$	$\frac{H(\overline{A} \cap B)}{H(\Omega)}$	$\frac{H(B)}{H(\Omega)}$
$\overline{B}$	$\frac{H(A \cap \overline{B})}{H(\Omega)}$	$\frac{H(\overline{A} \cap \overline{B})}{H(\Omega)}$	$\frac{H(\overline{B})}{H(\Omega)}$
	$\frac{H(A)}{H(\Omega)}$	$\frac{H(\overline{A})}{H(\Omega)}$	$\frac{H(\Omega)}{H(\Omega)}$

Die **Wahrscheinlichkeiten der Schnittmengen** können direkt abgelesen werden.

Die **Wahrscheinlichkeiten der Vereinigungsmengen** müssen berechnet werden. Hierbei gibt es zwei Möglichkeiten:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$$

Mit relativen Häufigkeiten sieht die Vierfeldertafel entsprechend so aus:

	A	$\overline{A}$	
B	$\frac{10}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$
$\overline{B}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{13}{28}$
	$\frac{16}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{28}{28} = 1$

$P(Lieblingsfach\ M\ oder\ GW\ wiederholt) =$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$
$\frac{16}{28} + \frac{15}{28} - \frac{10}{28} = \frac{21}{28}$

Hinweis: Die Personen in der Schnittmenge wurden sowohl bei A als auch bei B mitgezählt (tauchen also doppelt auf) und müssen deshalb wieder einmal abgezogen werden.

Ähnlichkeit

Zwei Figuren bzw. Körper F_1 und F_2 sind ähnlich ($F_1 \sim F_2$) zueinander, wenn man sie durch maßstäbliches Vergrößern oder Verkleinern in zueinander kongruente Figuren überführen kann.

Jede Streckenlänge in F_1 geht durch Multiplikation mit dem Ähnlichkeitsfaktor k in die entsprechende Streckenlänge von F_2 über.

Ist $k > 1$, so ist F_2 eine Vergrößerung von F_1
Ist $k < 1$, so ist F_2 eine Verkleinerung von F_1

Beim maßstäblichen Vergrößern (Verkleinern) wird bei

- Figuren der Flächeninhalt um das k^2-fache größer (kleiner)
- Körpern das Volumen um das k^3-fache größer (kleiner)

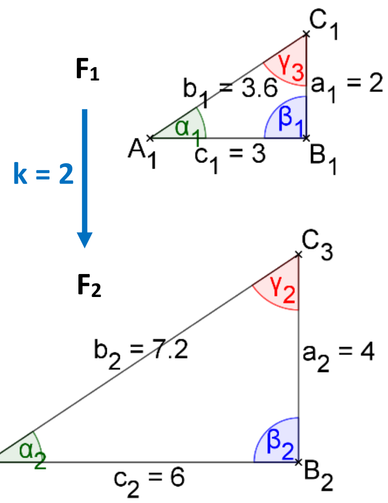
Eigenschaften ähnlicher Figuren:

- Entsprechende Winkel sind gleich groß
- Entsprechende Strecken haben das gleiche Längenverhältnis

Daraus folgen die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke:

Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn sie

- in zwei Winkeln übereinstimmen (WW-Satz)
- im Verhältnis entsprechender Seiten übereinstimmen (S:S:S-Satz)



$a_2 = 2 \cdot a_1$

$b_2 = 2 \cdot b_1$

$c_2 = 2 \cdot c_1$

Flächeninhalte:

$F_2 = 2^2 \cdot F_1 = 4 \cdot F_1$

Längenverhältnis entsprechender Strecken:

z.B. $\frac{längere\ Kathete}{kürzere\ Kathete} = \frac{c_1}{a_1} = \frac{3}{2} = 1{,}5 = \frac{6}{4} = \frac{c_2}{a_2}$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 34°$ und $\beta_1 = \beta_2 = 90°$ => $F_1 \sim F_2$ (WW-Satz)
Hinweis: Aufgrund der Winkelsumme von 180° im Dreieck folgt außerdem $\gamma_1 = \gamma_2 = 56°$.

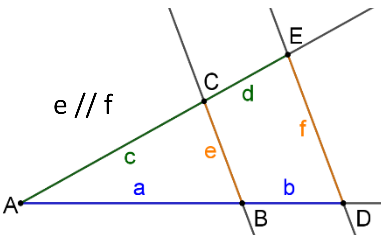
$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$
$2 : 3{,}6 : 3 = 4 : 7{,}2 : 6$ => $F_1 \sim F_2$ (S:S:S-Satz)

Strahlensätze

V-Figur

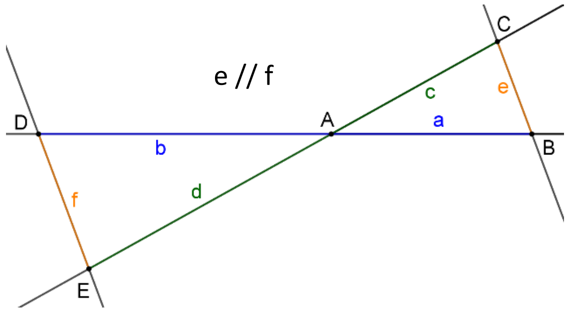
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\frac{a+b}{a} = \frac{f}{e} = \frac{c+d}{c}$



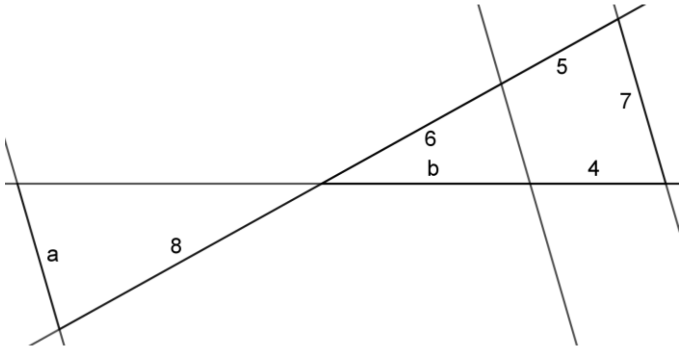
X-Figur

$\frac{b}{a} = \frac{f}{e} = \frac{d}{c}$



Hinweis: Alle Strahlensätze basieren auf den gleichen Längenverhältnissen entsprechender Strecken in den ähnlichen Dreiecken ABC und ADE.

A14: Berechne die Strecken a und b in der folgenden Figur (nicht maßstabsgetreu) aus zwei sich schneiden und drei parallelen Geraden:



L: $\frac{a}{8} = \frac{7}{6+5} \Rightarrow a = \frac{7\cdot 8}{6+5} = \frac{56}{11}$ (X-Figur)

$\frac{b+4}{b} = \frac{6+5}{6} \Rightarrow (b+4)\cdot 6 = 11\cdot b \Rightarrow$ 6b + 24 = 11b $\Rightarrow$

5b = 24 $\Rightarrow$ b = 24 : 5 = 4,8 (V-Figur)

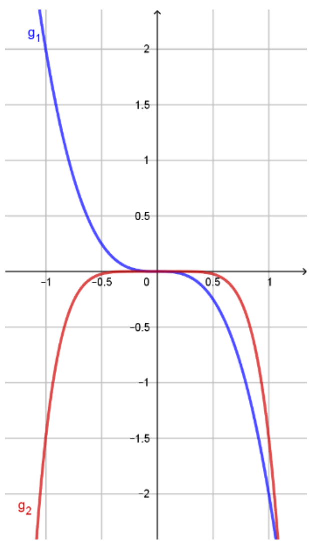
Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

Eine Funktion $f: x \longmapsto a \cdot x^n$ ($n \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$) heißt **Potenzfunktion**. Der Exponent n gibt den **Grad der Funktion** an.

1) Ist n **gerade**, so ist der Graph **achsensymmetrisch** bezüglich der y-Achse
2) Ist n **ungerade**, so ist der Graph **punktsymmetrisch** bezüglich des Koordinatenursprungs.

Alle Graphen verlaufen durch die Punkte A(0|0) und B(1|a)

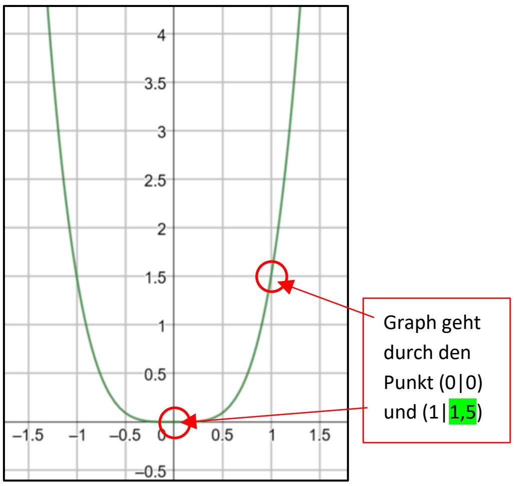
Für **a < 0** ist der Graph von g: $x \longmapsto a \cdot x^n$ im Vergleich zu G_f mit $f: x \longmapsto |a| \cdot x^n$ an der x-Achse gespiegelt:



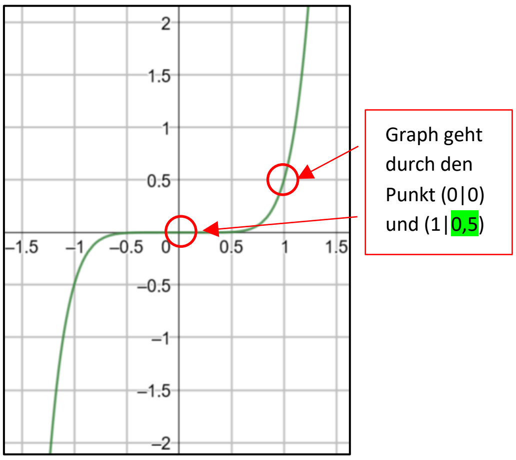
$g_1(x) = -2 \cdot x^3$

$g_2(x) = -1{,}5 \cdot x^6$

1) n gerade: $f(x) = 1{,}5 \cdot x^4$



2) n ungerade: $g(x) = 0{,}5 \cdot x^7$



n-te Wurzel und Potenzen mit rationalen Exponenten

Die **n-te Wurzel** von a $(a \geq 0)$ ist diejenige nicht negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt.

Man schreibt $\sqrt[n]{a}$ $(n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$.

Für a > 0, $z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a^z} \qquad a^{-\frac{z}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^z}}$$

$\sqrt[3]{8} = 2,$ denn $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{-8} =$ diese Wurzel existiert nicht!

$\sqrt[4]{81} = 3,$ denn $3^4 = 81$

$$5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}; \qquad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2}; \qquad 7^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{7^2}}$$

A15: a) Wandle in eine Wurzel um: $4^{\frac{6}{11}}$; $5^{\frac{1}{3}}$; $3^{-\frac{7}{4}}$

b) Wandle in eine Potenz mit rationalem Exponenten um: $\sqrt[5]{13^6}$; $\frac{1}{\sqrt[10]{7^7}}$; $\sqrt[5]{16}$

L: a) $4^{\frac{6}{11}} = \sqrt[11]{4^6}$; $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^1} = \sqrt[3]{5}$; $3^{-\frac{7}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3^7}}$

b) $\sqrt[5]{13^6} = 13^{\frac{6}{5}}$; $\frac{1}{\sqrt[10]{7^7}} = 7^{-\frac{7}{10}}$; $\sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{2^4} = 2^{\frac{4}{5}}$

Potenzgesetze:

Für a,b > 0 und rationalen Exponenten r und s gilt:

1. Potenzen mit gleicher Basis:

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ bzw. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

$$2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{3}{5}+\frac{1}{5}} = 2^{\frac{4}{5}} \quad \text{bzw.} \quad 2^{\frac{2}{5}} : 2^{\frac{4}{5}} = 2^{\frac{2}{5}-\frac{4}{5}} = 2^{-\frac{2}{5}}$$

2. Potenzen mit gleichem Exponenten:

$a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$ bzw. $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

$$5^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} = (5 \cdot 4)^{\frac{2}{3}} = 20^{\frac{2}{3}} \quad \text{bzw.} \quad 6^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{2}{3}} = (6:3)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$$

3. Potenzen von Potenzen:

$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

$$(7^2)^5 = 7^{2 \cdot 5} = 7^{10}$$

A16: a) Schreibe als eine Potenz:

i) $3^5 \cdot 3^9 =$ ii) $\frac{4^3}{7^3} =$ iii) $(2^3)^2 =$

b) Schreibe als Produkt:

i) $3^{2+5} =$ ii) $(2 \cdot 5)^7 =$ iii) $8^{2 \cdot 6} =$

L: a) i) $3^5 \cdot 3^9 = 3^{5+9} = 3^{14}$

ii) $\frac{4^3}{7^3} = \left(\frac{4}{7}\right)^3$ iii) $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$

b) i) $3^{2+5} = 3^2 \cdot 3^5$ ii) $(2 \cdot 5)^7 = 2^7 \cdot 5^7$

iii) $8^{2 \cdot 6} = (8^2)^6$ *oder* $(8^6)^2$

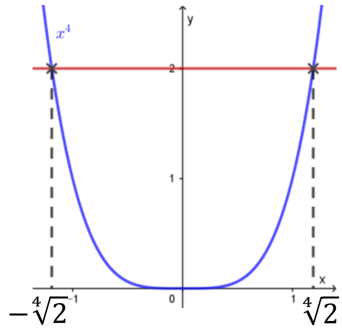
Potenzgleichungen

Beim Lösen von Potenzgleichungen $\boldsymbol{x^n = c}$
$(n \in \mathbb{N}; n \geq 2; c \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ unterscheidet man vier Fälle:

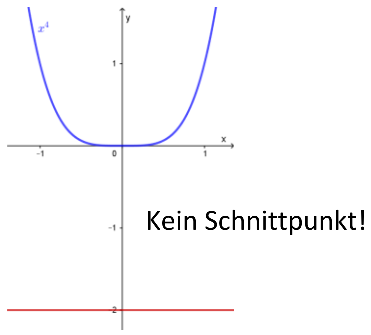
1. Fall: n gerade, c > 0
   Es gibt zwei Lösungen: $x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{c}$
2. Fall: n gerade, c < 0
   Es gibt keine Lösung
3. Fall: n ungerade, c > 0
   Es gibt eine Lösung: $x = \sqrt[n]{c}$
4. Fall: n ungerade, c < 0
   Es gibt eine Lösung: $x = -\sqrt[n]{c}$

Die graphische Veranschaulichung bzw. graphische Lösung der vier Fälle seht ihr in der rechten Spalte.

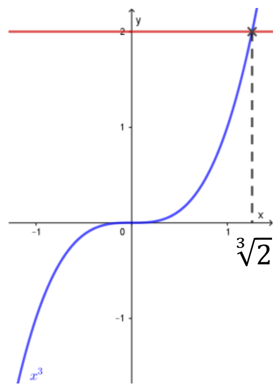
1. Fall: $x^4 = 2 \quad => \quad x = \pm\sqrt[4]{2}$



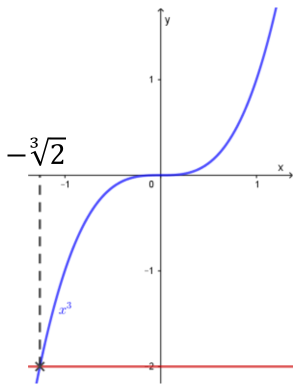
2. Fall: $x^4 = -2 \rightarrow nicht\ möglich/lösbar$



3. Fall: $x^3 = 2 \quad => \quad x = \sqrt[3]{2}$



4. Fall: $x^3 = -2 \quad => \quad x = -\sqrt[3]{2}$



Schnittpunkte von Graphen zweier Potenzfunktionen

1. Gleichsetzen der Funktionsterme: $f(x) = g(x)$
2. Umformen, sodass die Gleichung $f(x) - g(x) = 0$ entsteht
3. Ausklammern der größtmöglichen Potenz von „x“
4. Koeffizient vor „x“ in der Klammer ausklammern
5. Das durch Ausklammern entstandene Produkt ist Null, wenn einer der beiden Faktoren Null ist (im Beispiel rechts und markiert). Bestimme die x-Koordinaten, für welche die einzelnen Faktoren des Produkts gleich null werden!
6. Bestimme die y-Koordinaten der Schnittpunkte durch Einsetzen der x-Koordinate in eine der beiden Funktionsgleichungen

Berechne den Schnittpunkt der Funktionsgraphen von f und g mit $f(x) = -4x^3$ und $g(x) = -\frac{1}{4}x^7$.

1. $-4x^3 = -\frac{1}{4}x^7$
2. $-4x^3 + \frac{1}{4}x^7 = 0$
3. $x^3 \cdot \left(\frac{1}{4}x^4 - 4\right) = 0$
4. $\frac{1}{4}x^3 \cdot (x^4 - 16) = 0$

Schritt 3 und 4 können später in einem Schritt zusammengefasst werden.

5. a) $\frac{1}{4}x^3 = 0$ für $x_1 = 0 \rightarrow 6.\ y_1 = f(0) = 0$
$\rightarrow S_1(0|0)$

b) $x^4 - 16 = 0$ => $x^4 = 16$
$x_2 = \sqrt[4]{16} = 2 \rightarrow 6.\ y_2 = f(2) = -32$
$\rightarrow S_2(2|-32)$
$x_3 = -\sqrt[4]{16} = -2 \rightarrow 6.\ y_3 = f(-2) = 32$
$\rightarrow S_3(-2|32)$

A17: Berechne den Schnittpunkt der Funktionsgraphen von f und g mit $f(x) = \frac{1}{3}x^7$ und $g(x) = 3x^5$.

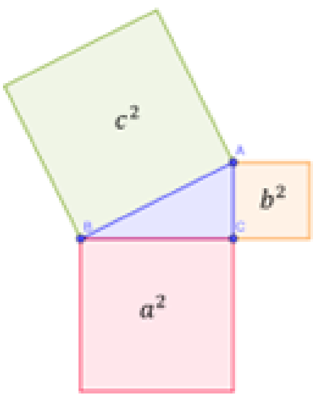
L: 1. $\frac{1}{3}x^7 = 3x^5$
2. $\frac{1}{3}x^7 - 3x^5 = 0$
3. $x^5 \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - 3\right) = 0$
4. $\frac{1}{3}x^5 \cdot (x^2 - 9) = 0$
5. a) $\frac{1}{3}x^5 = 0$ für $x_1 = 0 \rightarrow 6.\ y_1 = f(0) = 0 \rightarrow S_1(0|0)$
b) $x^2 - 9 = 0$ <=> $x^2 = 9$ <=> $x_{2,3} = \pm\sqrt{9}$
$x_2 = \sqrt{9} = 3 \rightarrow 6.\ y_2 = f(3) = 729 \rightarrow S_2(3|729)$
$x_3 = -\sqrt{9} = -3 \rightarrow 6.\ y_3 = f(-3) = -729$
$\rightarrow S_3(-3|-729)$

Der Satz des Pythagoras

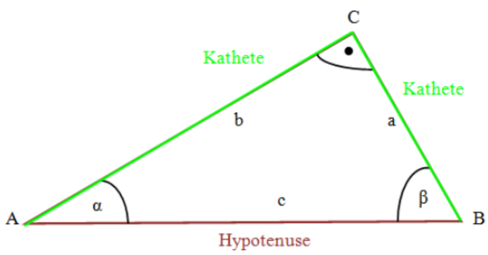
In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man die Seite, die dem rechten Winkel (90°) gegenüberliegt, *Hypotenuse*. Die beiden anderen Seiten, die den rechten Winkel einschließen, heißen *Katheten*.

Satz des Pythagoras:

Addiert man die Quadrate der beiden Kathetenlängen, so erhält man das Quadrat der Hypotenusenlänge.



(Kathete 1)² + (Kathete 2)² = (Hypotenuse)²



A18: In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der einen Kathete a = 3cm und die Länge der Hypotenuse c = 5cm. Berechne die Länge der anderen Kathete.

L: $a^2 + b^2 = c^2$
$b^2 = c^2 - a^2 = 25cm^2 - 9cm^2 = 16cm^2$
b = 4cm

Oft heißt es dafür kurz:

$a^2 + b^2 = c^2$ (falls c Hypotenuse)

Umkehrung des Satzes von Pythagoras gilt auch:

Gilt in einem Dreieck die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, so ist das Dreieck bei **C** rechtwinklig.

A19: Weise nach, dass das Dreieck mit den Seitenlängen x = 5cm, y = 12cm und z = 13cm rechtwinklig ist.

L: $(5cm)^2 + (12cm)^2 = 25cm^2 + 144cm^2 =$
$169cm^2 = (13cm)^2$
=> Dreieck ist rechtwinklig

Nützliche Formeln

Diagonale d eines Quadrats mit Kantenlänge a:

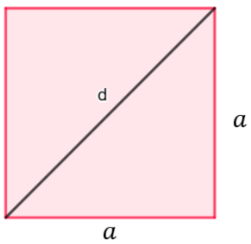
$$d = \sqrt{2}\,a$$

Herleitung:

$$a^2 + a^2 = d^2$$

$$2a^2 = d^2$$

$$d = \sqrt{2}\,a$$



Raumdiagonale e in einem Würfel mit Kantenlänge a:

$$e = \sqrt{3}\,a$$

Herleitung:

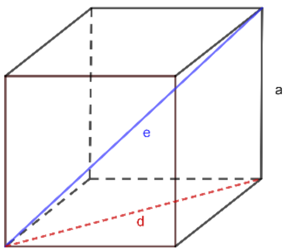
$$e^2 = d^2 + a^2$$

↓ *(d siehe oben)*

$$e^2 = 2a^2 + a^2$$

$$e^2 = 3a^2$$

$$e = \sqrt{3}\,a$$



Höhe h im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a:

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

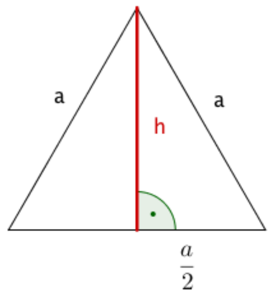
Herleitung:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$$

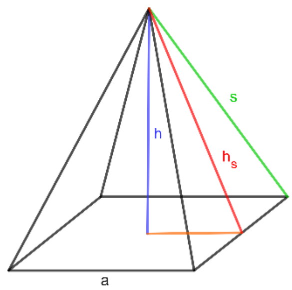
$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}\,a^2$$

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



A: Berechne die Höhe *h* der Pyramide, wenn für jede Seitenfläche gilt:
Höhe des Seitendreiecks $h_s = 5cm$
Länge der Grundfläche $a = 6cm$

L: $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2$
$h^2 = (5cm)^2 - (3cm)^2 = 16cm^2$
$h = 4cm$

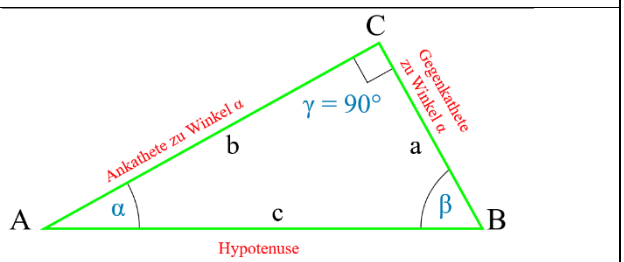


Trigonometrie

→ Beziehungen zwischen Dreiecksseiten und -winkeln

Trigonometrie in rechtwinkligen Dreiecken

Die einem gegebenen spitzen Winkel benachbarte Kathete heißt Ankathete, die gegenüberliegende Gegenkathete.



Werk von UniCollab, Wikimedia Commons,

Hinweis: In der Zeichnung oben ist die Ankathete von α zugleich die Gegenkathete von β und umgekehrt.

Mit üblichen Bezeichnungen und $0 < \alpha < 90°$ heißen

Sinus von α: $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

Kosinus von α: $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

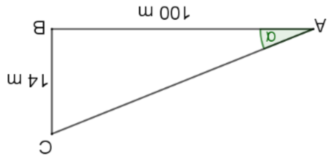
Tangens von α: $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

Gegeben sind $\gamma = 90°$, $a = 6\text{cm}$, $c = 10\text{cm}$.
Berechne die fehlenden Winkelgrößen.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{6\text{ cm}}{10\text{ cm}} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \alpha \approx 36{,}87°$$

$$\cos\beta = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{6\text{ cm}}{10\text{ cm}} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \beta \approx 53{,}13°$$

A: Bei der Fahrt auf den Kasberg in der Fränkischen Schweiz geht es zwischenzeitlich mit einer 14%igen Steigung bergan. Berechne den Anstiegswinkel.



L: Gesucht ist α (s. Skizze).

$\tan\alpha = \frac{140m}{1000m} = \frac{7}{50}$

$\Rightarrow \alpha \approx 7{,}97°$

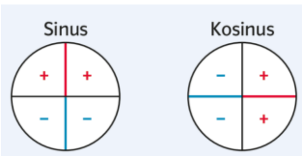
Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Sei $\mathrm{P(x|y)}$ ein Punkt auf dem Einheitskreis, α der Winkel zwischen der positiven x-Achse und der Strecke $\overline{0\mathrm{P}}$ mit $0 \le \alpha \le 360°$. Dann sind $\boxed{\cos\alpha = \mathrm{x}}$ und $\boxed{\sin\alpha = \mathrm{y}}$.

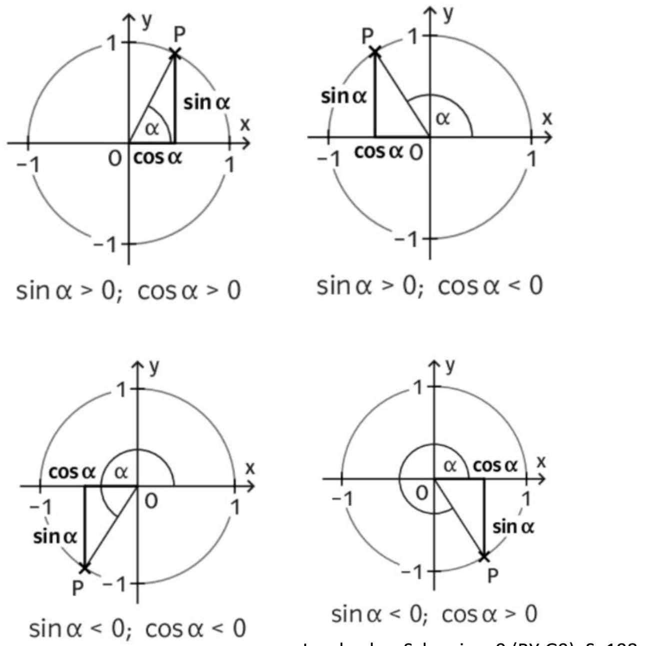
Für $\alpha > 90°$ ist mind. einer der beiden Werte negativ. Stumpfe und überstumpfe Winkel lassen sich aber auf spitze Winkel zurückführen. Es gilt, sogar mit $\alpha \le 90°$:

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$

Übersicht: jeweilige Vorzeichen in den vier Quadranten



Lambacher Schweizer 9 (BY G9), Klett Verlag, S. 198



Lambacher Schweizer 9 (BY G9), S. 198.

Hinweis zum Umgang mit dem Taschenrechner

Zu jeder gegebenen Winkelgröße gehört genau ein Sinus- und genau ein Kosinuswert.

$\sin 330° = \frac{1}{2}$; $\cos 225° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin 127° \approx 0{,}7986$

Umgekehrt lässt sich aus geg. Sinus- und Kosinuswerten mittels der Umkehrungen Arkussinus → TR $\boxed{\sin^{-1}}$ bzw. Arkuskosinus → TR $\boxed{\cos^{-1}}$ auf die zugrundeliegenden Winkelgrößen zwischen 0° und 360° zurückschließen.
Achtung dabei:

- Ist genau einer der beiden Werte gegeben, so gibt es zwei mögliche dazugehörige Winkel zwischen 0° und 360°. Der TR gibt jedoch nur einen von ihnen aus. Der zweite wird mithilfe obiger Formeln bestimmt.
- Für ein eindeutiges Ergebnis müssen sowohl Sinus als auch Kosinus des Winkels bekannt sein.
- Gibt der TR eine negative Winkelgröße an, so bedeutet dies, dass der Winkel im Uhrzeigersinn geöffnet wird. I.d.R. ist verlangt, als Ergebnis den Gegenwinkel anzugeben, der dann konventionsgemäß entgegen dem Uhrzeigersinn geöffnet ist. Das Phänomen tritt je nach TR oft bei Winkeln $> 270°$ auf.

Bestimme den Winkel α, $0° < \alpha < 360°$, für den gilt: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

TR: $\boxed{\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}$ $\boxed{=}$ liefert $\boxed{60}$

$\Rightarrow \alpha_1 = 60°$ oder $\alpha_2 = 300°$;

Ausschluss von α_2, da $\sin 300° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$,

also ist die Lösung: $\alpha = 60°$.

Bestimme die beiden Winkel α_1 und α_2 zwischen 0° und 360°, für die gilt: $\sin\alpha = -0{,}9336$.

TR: $\boxed{\sin^{-1}(-0{,}9336)}$ $\boxed{=}$ liefert $\boxed{-69{,}00312963\ldots}$

Zwischenergebnis: $\alpha \approx -69°$, für erste Lösung:
Gegenwinkel bestimmen $\Rightarrow \alpha_1 \approx 360° - 69° = 291°$,
zweite Lösung: $\alpha_2 \approx 180° + 69° = 249°$

Trigonometrie in allgemeinen Dreiecken

In jedem Dreieck ABC gelten der Sinussatz**:**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

und der Kosinussatz:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

Der Satz des Pythagoras ist Spezialfall des Kosinussatzes, da $\cos 90° = 0$. In diesem Fall fällt der Subtrahend weg.

Berechne die fehlenden Seitenlängen und Winkelgrößen des Dreiecks ABC: $\mathrm{b} = 4{,}2\mathrm{cm}$, $\mathrm{c} = 5\mathrm{cm}$, $\gamma = 25°$.

$$\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\beta = \frac{4{,}2}{5}\cdot\sin 25° \approx 0{,}355 \Rightarrow \beta \approx 20{,}8°$$

$\alpha \approx 180° - 25° - 20{,}8° = 134{,}2°$ (Innenwinkelsatz)

$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \Rightarrow a = \frac{\sin 134{,}2°}{\sin 25°}\cdot 5\text{ cm} \approx 8{,}48\text{ cm}$$

alternativ Anwendung des Kosinussatzes:

$$\begin{aligned} \mathrm{a}^2 &= (4{,}2\mathrm{cm})^2 + (5\mathrm{cm})^2 - 2\cdot 4{,}2\mathrm{cm}\cdot 5\mathrm{cm}\cdot\cos 134{,}2° \\ &\approx 72{,}92\text{ cm}^2 \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \mathrm{a} \approx 8{,}48\text{ cm}$$

Wichtige Zusammenhänge

Alle Zusammenhänge entstammen dem rechtwinkligen Dreieck, lassen sich aber für beliebig große Winkel verallgemeinern.

1. $\boxed{\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)}$ und $\boxed{\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)}$.
2. Trigonometrischer Pythagoras:
   $\boxed{(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1}$
3. $\boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ für $\alpha \neq 90°$, da $\cos 90° = 0$.

Vereinfache den Term $\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha}$.

$$\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$$