Kurvendiskussion einer Funktion f(x) – „Rezeptvorlagen“

Nullstellen: Setze $f(x) = 0 \rightarrow \rightarrow \rightarrow$ $x_N = \ldots$

x_N einfache Nullstelle: Graph hat dort einen Vorzeichenwechsel, schneidet also die x-Achse

x_N doppelte Nullstelle: Graph hat dort keinen Vorzeichenwechsel,
berührt also die x-Achse (von oben oder unten)

Extremwerte: Setze $f'(x) = 0 \rightarrow \rightarrow \rightarrow$ $x_E = \ldots$

1. Mö: Setze x_E in $f''(x)$ ein

Gilt $f''(x_E) > 0 \rightarrow$ TIP $(x_E/ f(x_E))$

Gilt $f''(x_E) < 0 \rightarrow$ HOP $(x_E/ f(x_E))$

2. Mö: Bilde Vorzeichentabelle von $f'(x)$;
Faktorisiere dazu zuerst $f'(x)$ und
unterteile die Zahlengerade in Intervalle mit x_E als Grenzen:

		$x < x_{E1}$	$x_{E1}<x<x_{E2}$	$x>x_{E2}$
allg. Bsp:				
	(untersuche hier die einzelnen Faktoren auf ihre Vorzeichen)			
Ergebnisbeispiel:	$f'(x)$	+	−	+
	G_f	sm steigend	sm fallend	sm steigend

↑ ↓ ↑

Max bei x_{E1} Min bei x_{E2}

Wendepunkte: (Extremstellen der lokalen Änderungsrate, also der Tangentensteigungen)
Setze $f''(x) = 0 \rightarrow \rightarrow \rightarrow$ $x_W = \ldots$

1. Mö: Setze x_W in $f'''(x)$ ein

Gilt $f'''(x_W) \neq 0 \rightarrow$ WEP $(x_W/ f(x_W))$

2. Mö: Bilde Vorzeichentabelle von $f''(x)$ (analog oben);
Liegt bei x_W ein Vorzeichenwechsel vor,
dann hat der Graph von f an dieser Stelle einen Krümmungswechsel, also WEP $(x_W/ f(x_W))$

Vorteil dieser Möglichkeit:
Aufgrund der Art des VZ-Wechsels (von + nach −; oder umgekehrt) kann man erkennen, ob bei x_W ein Min oder Max der lokalen Änderungsrate vorliegt!

<u>*Sonderfall:*</u> gibt es ein x_T , für das gilt: $f'(x_T) = 0$ und $f''(x_T) = 0$ und $f'''(x_T) \neq 0$,

dann liegt dort ein **Terrassenpunkt** vor TEP$(x_T/ f(x_T))$
(**Wendepunkt mit waagrechter Tangente**)

Vielfachheit von Nullstellen: Sei $f(x) = \ldots(x-x_0)^k\ldots$ mit $k \in$ IN

Gilt k = 1, dann hat die Funktion bei $x = x_0$ ein einfache Nullstelle,
der Graf hat dort einen Vorzeichenwechsel

Gilt k = 2n (gerade, $n \geq 1$), dann hat der Graf bei $x = x_0$ eine doppelte Nullstelle,
der Grapf berührt dort die x-Achse, also liegt bei $x = x_0$ ein Extremum vor

Gilt k = 2n+1 (ungerade, $n \geq 1$), dann hat der Graf bei $x = x_0$ einen Terrassenpunkt
und einen Vorzeichenwechsel

Symmetrie:

- **achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn f(-x) = f(x)**
- **punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn f(-x) = - f(x)**

Idee: Bilde f(-x) und prüfe, ob durch algebraische Umformung eine der beiden Symmetrien vorliegt.

Beachte: Ganzrationale Funktionen sind

- achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn nur gerade Potenzen von x auftreten.
  (Dabei zählt eine Konstante a als gerade Potenz, weil $a = ax^0$)
- punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn nur ungerade Potenzen von x auftreten.

Verhalten im Unendlichen:

Bilde $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = ???$

Falls es sich um eine ganzrationale Funktion handelt, genügt es, nur die höchste Potenz zu untersuchen!
Außerdem kann obiger Grenzwert für ganzrationale Funktionen nur $+\infty$ oder $-\infty$ sein!

Krümmung: Suche die Nullstellen der zweiten Ableitung f ''(x) und erstelle eine Vorzeichentabelle

allg. Bsp:		$x < x_W$	$x > x_W$
		(untersuche hier die einzelnen Faktoren auf ihre Vorzeichen)	
mögl- Ergebnis:	$f''(x)$	-	+
	G_f	rechts gekrümmt	links gekrümmt

zusätzlich erhält man WEP $(x_W / f(x_W))$

Wertemenge IW:

Die Wertemenge enthält diejenigen y-Werte, welche die Funktion auf ID annimmt.

Günstig: Erst Graf zeichnen, dann lässt daran IW direkt ablesen!

Wendetangente: Tangentengleichung t: $y = mx + t$ im Wendepunkt WEP $(x_W / f(x_W))$ aufstellen.
Die Steigung der Wendetangente entspricht dabei $m = f'(x_W)$